ECHANTILLONNAGE POUR LES ESPACESDE FONCTIONS ANALYTIQUES À POIDS

Rémi Dhuez

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
U.F.R. M.I.M.

Année 2004/2005 ***N° attribué par la bibliothèque***

<u>THÈSE</u>

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Discipline : **Mathématiques**

Ecole Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille,

présentée et soutenue publiquement

par

Rémi DHUEZ

le 29 septembre 2005

<u>*Titre :*</u>

ECHANTILLONNAGE POUR LES ESPACES DE FONCTIONS ANALYTIQUES À POIDS

Directeur de thèse :

M. Karim KELLAY

JURY

M. **Alexander BORICHEV**,	Chargé de recherches, Université Bordeaux I,	Président du jury
M. **Bernard COUPET**,	Professeur, Université de Provence,	Examinateur
M. **Karim KELLAY**,	Maître de conférences, Université de Provence,	Directeur de thèse
M. **Artur NICOLAU**,	Professeur, Universitat Autonoma de Barcelona,	Rapporteur
M. **Pascal J. THOMAS**,	Professeur, Université Paul Sabatier,	Rapporteur
M. **El Hassan YOUSSFI**,	Professeur, Université de Provence,	Examinateur

Travail présenté pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences de l'Université de Provence

Spécialité : Mathématiques

Ecole Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille

par **Rémi DHUEZ**

Sujet :

Echantillonnage pour les espaces de fonctions analytiques à poids

soutenu le **29 septembre 2005**
devant le jury composé de :

M. **Alexander BORICHEV**,	Chargé de recherches, Université Bordeaux I,	Président du jury
M. **Bernard COUPET**,	Professeur, Université de Provence,	Examinateur
M. **Karim KELLAY**,	Maître de conférences, Université de Provence,	Directeur de thèse
M. **Artur NICOLAU**,	Professeur, Universitat Autonoma de Barcelona,	Rapporteur
M. **Pascal J. THOMAS**,	Professeur, Université Paul Sabatier,	Rapporteur
M. **El Hassan YOUSSFI**,	Professeur, Université de Provence,	Examinateur

REMERCIEMENTS

Monsieur Karim KELLAY m'a fait l'honneur de diriger cette thèse et m'a prodigué, tout au long de cette étude, ses précieux conseils et ses encouragements. Qu'il me permette de lui témoigner ma chaleureuse amitié.

Monsieur Alexander BORICHEV a collaboré avec Karim KELLAY et moi–même à un article qui étend et complète les résultats des chapitres II et III de cette thèse. Je les remercie de me laisser inclure dans ma thèse des résultats issus de notre travail commun.

Je tiens aussi à remercier vivement les Professeurs NICOLAU et THOMAS qui ont bien voulu rapporter sur cette thèse et me faire bénéficier de leurs remarques et de leurs conseils.

Mes remerciements vont également aux Professeurs COUPET et YOUSSFI pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail en acceptant de faire partie du jury.

♡ *Que ma mère, mon père et ma grand–mère trouvent ici l'expression de mon amour et de ma reconnaissance pour leur soutien affectif et financier*♡

Rémi DHUEZ

Table des matières

Introduction

Ce travail, qui comporte trois chapitres, traite du problème d'échantillonnage pour les espaces de fonctions analytiques à poids.

Un poids h est une fonction continue strictement croissante de $[0,1[\to[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{r\to 1-} h(r)=+\infty$. On étend h sur le disque unité $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ par $h(z)=h(|z|)$. Soit $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes f sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_h=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|e^{-h(|z|)}<+\infty.$$

On dit que $\Gamma\subset\mathbb{D}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ quand il existe $L>0$ tel que pour tout $f\in\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_h\leq L\ \|f|_\Gamma\|_h,$$

où $\|f|_\Gamma\|_h=\sup\limits_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|e^{-h(|\zeta|)}$. La borne inférieure de telles constantes L est notée $L_h(\Gamma)$.

Nous allons d'abord énoncer les résultats connus sur l'échantillonnage pour divers types d'espaces à poids. Ces résultats constituent la principale motivation de ce travail.
Seip dans **[20]** a donné une caractérisation complète, en terme de densité, des ensembles d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})=\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ lorsque $h(r)=\alpha\ln\frac{1}{1-r^2}$. Il a montré qu'une suite $\Gamma\subset\mathbb{D}$ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})=\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si elle contient une suite Γ' hyperboliquement séparée telle que sa densité hyperbolique inférieure uniforme vérifie

$$D^-(\Gamma')=\varliminf_{r\to 1-}\ \inf_{\Phi\in\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})}\frac{\sum_{z\in\Phi(\Gamma'):\frac{1}{2}<|z|<r}|\ln|z||}{|\ln(1-r)|}>\alpha,\tag{1}$$

où $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{D}$. Lorsque le laplacien du poids h vérifie

$$\Delta h(z)\asymp(1-|z|^2)^{-2},\tag{2}$$

la condition (1) se généralise en

$$\varliminf_{r\to 1-}\ \inf_{\Phi\in\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})}\frac{\int_0^r\mathrm{Card}\,\big(\Gamma'\cap\Phi(t\mathbb{D})\big)\,dt}{\int_0^r\int_{\Phi(t\mathbb{D})}\Delta h(\zeta)\,dm_2(\zeta)\,dt}>\frac{1}{2\pi}.\tag{3}$$

En effet, Berndtsson et Ortega–Cerdà dans **[1]** ont montré que la condition (3) est nécessaire pour ce type de poids. Seip dans **[22]** a montré que (3) est également suffisante. Mentionnons que la preuve de Seip est basée sur la construction d'une fonction g analytique sur $\mathbb{D}$ telle que son ensemble de zéros $Z(g)$ est hyperboliquement séparé et

$$|g(z)| \asymp \rho(z, Z(g))e^{h(z)},$$

et ce lorsque Δh vérifie (2). Pour de telles constructions voir **[15]** et **[14]**.
Concernant les espaces de type Fock, nous avons aussi des résultats analogues sur l'échantillonnage en terme de densité de type Beurling–Landau. Soit ϕ une fonction sous–harmonique sur $\mathbb{C}$. On pose

$$\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C}) = \big\{f \text{ holomorphes sur } \mathbb{C} : \|f\|_\phi = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-\phi(z)} < +\infty\big\}.$$

L'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$ est défini de manière analogue à ci–dessus.
Le cas des espaces de Fock classiques où $\phi(z) = \alpha|z|^2$, a été traité par Seip et Wallstén. Ils ont montré dans **[21]** et **[26]** qu'une suite Γ est d'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$ si et seulement si Γ contient une suite séparée Γ' telle que

$$D^-(\Gamma') = \varliminf_{R\to+\infty} \inf_{w\in\mathbb{C}} \frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma' \cap \mathbb{D}(w,R)\big)}{\pi R^2} > \frac{2\alpha}{\pi},$$

où $\mathbb{D}(w,R)$ désigne le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre w et de rayon R. Le cas où $\Delta\phi(z) \asymp 1$ a d'abord été traité par Berndtsson et Ortega–Cerdà **[1]**, puis par Ortega–Cerdà et Seip **[18]**. Ils ont montré que toute suite Γ séparée est d'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$ si la ϕ–densité inférieure uniforme de Γ vérifie

$$D_\phi^-(\Gamma) = \varliminf_{R\to+\infty} \inf_{w\in\mathbb{C}} \frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma \cap \mathbb{D}(w,R)\big)}{\int_{\mathbb{D}(w,R)} \Delta\phi(\zeta)\, dm_2(\zeta)} > \frac{1}{2\pi}.$$

Mentionnons également le travail de Lyubarskii et Seip **[15]** qui traite des poids non radiaux de type $\phi(z) = |z|^2\mu(\arg z)$, où μ est une fonction 2π–périodique assez régulière. Ils obtiennent le même type de condition sur la densité uniforme.
Marco, Massaneda et Ortega–Cerdà dans **[17]** ont donné une caractérisation complète des suites d'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$ lorsque $\Delta\phi$ est une mesure doublante (par exemple $\phi(z) = |z|^\beta$). On pose $\chi_\phi(z) = 1/\sqrt{\Delta\phi(z)}$ et on dit que $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est χ_ϕ–séparé lorsque

$$\inf\big\{|w-z| \min\big(\sqrt{\Delta\phi(z)}, \sqrt{\Delta\phi(w)}\big)\ :\ z, w \in \Gamma\ ,\ z \neq w\big\} > 0.$$

Ils ont montré que la suite Γ est d'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$ si et seulement si Γ contient une suite Γ' χ_ϕ–séparée telle que

$$D_\phi^-(\Gamma') = \varliminf_{R\to+\infty} \inf_{w\in\mathbb{C}} \frac{\mathrm{Card}\left(\Gamma' \cap \mathbb{D}(w, R\chi_\phi(w))\right)}{\int_{\mathbb{D}(w,R\chi_\phi(w))} \Delta\phi(\zeta)\, dm_2(\zeta)} > \frac{1}{2\pi}.$$

Dans le *Chapitre I*, nous étudions la stabilité de Möbius de l'échantillonnage lorsque le poids radial h est à croissance lente. Ce chapitre contient l'article [**5**]. Plus précisément, on dit que l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ satisfait la stabilité de Möbius lorsque tout ensemble Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ vérifie

$$\sup_{\Phi\in\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})} L_h(\Phi(\Gamma)) < +\infty.$$

Un élément essentiel de la preuve de Seip est le fait que l'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ satisfait la stabilité de Möbius. En effet, pour tout $\Phi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$, l'opérateur T_Φ défini par $(T_\Phi f)(z) = (\Phi'(z))^\alpha f(\Phi(z))$ est une isométrie de $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. Donc si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$, alors $L_h(\Phi(\Gamma)) = L_h(\Gamma)$ pour tout $\Phi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$.

Dans ce *premier Chapitre*, nous considérons les poids $h \in \mathcal{C}^1$ tels que $(1-r)h'(r) \to 0$ quand $r \to 1-$. Cette condition implique que

$$\lim_{r\to1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = 0.$$

Nous définissons la h–densité inférieure non–uniforme de $\Gamma \subset \mathbb{D}$ par

$$D_0^-(\Gamma, h) = \varliminf_{r\to1-} \frac{\sum_{z\in\Gamma:1/2<|z|<r} |\ln|z||}{h(r)}.$$

La h–densité inférieure uniforme de Γ est définie par

$$D^-(\Gamma, h) = \varliminf_{r\to1-} \inf_{\Phi\in\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})} \frac{\sum_{z\in\Phi(\Gamma):1/2<|z|<r} |\ln|z||}{h(r)}.$$

Une condition nécessaire pour que Γ soit un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ est qu'il contienne un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' satisfaisant $D_0^-(\Gamma', h) > 1$. Réciproquement, nous donnons une condition suffisante précise d'échantillonnage dans le cas des suites régulièrement distribuées. Puis nous construisons un ensemble hyperboliquement séparé Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec $D^-(\Gamma, h) = 0$. Par conséquent, notre condition nécessaire d'échantillonnage n'est pas préservée par les automorphismes de $\mathbb{D}$ et la stabilité de Möbius de l'échantillonnage n'est pas vérifiée dans nos espaces à poids à croissance lente (voir le *Corollaire I.3.5*).

Les *Chapitres II et III* traitent du problème d'échantillonnage lorsque le poids radial h est à croissance rapide. Une partie de ce travail est contenue dans **[3]** écrit en collaboration avec Borichev et Kellay.

Dans le *Chapitre II*, nous étudions la séparation et les ensembles de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, lorsque le poids h est à croissance rapide. On pose

$$\chi(r) = 1/\sqrt{\Delta h}(r) = (h''(r) + h'(r)/r)^{-1/2}.$$

Nous nous intéressons aux poids h tels que $h''(r)\chi^2(r) \to 1$, $\chi(r)$ décroît vers 0 et $\chi'(r) \to 0$ quand $r \to 1-$. Ces conditions impliquent que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Nous supposons que h satisfait l'une des deux conditions suivantes

(I) : $\sup_{r\in[0,1[}(1-r)|\chi'(r)|/\chi(r) < +\infty$,

(II) : $\lim_{r\to 1-} |\chi'(r)||\ln\chi(r)| = 0$.

On pose

$$\rho_h(z,w) = |z-w|\sqrt{\Delta h}(\min(|z|,|w|)), \qquad z,w\in\mathbb{D}.$$

Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est dit ρ_h–séparé si

$$\inf\{\rho_h(z,w) \ : \ z,w\in\Gamma\ , z\neq w\} > 0.$$

Nous montrons que de tout ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on peut extraire une suite ρ_h–séparée et d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Grâce aussi à cette notion de ρ_h–séparation, nous donnons des exemples de suites régulièrement distribuées qui sont d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

On définit ensuite les χ–densités uniformes suivantes

$$D_\chi^-(\Gamma) = \varliminf_{R\to+\infty}\ \varliminf_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Card}\left(\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))\right)}{\pi R^2},$$

$$D_\chi^+(\Gamma) = \varlimsup_{R\to+\infty}\ \varlimsup_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Card}\left(\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))\right)}{\pi R^2}.$$

Lorsque Γ est ρ_h–séparé, nous remarquons que $D_\chi^-(\Gamma) < +\infty$. Nous montrons, grâce à la formule de Jensen, qu'un ensemble Γ de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ a une χ–densité inférieure uniforme qui vérifie $D_\chi^-(\Gamma) \leq 1/(2\pi)$. Nous terminons ce chapitre par la construction (de même type que celle de Lyubarskii et Malinnikova **[14]** ou Lyubarskii et Sodin **[16]**) d'une fonction $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ ayant une croissance contrôlée et d'ensemble de zéros de χ–densité maximale.

Plus précisément, notre *Théorème II.1.1* montre qu'il existe une fonction g analytique sur $\mathbb{D}$, d'ensemble de zéros $Z(g)$, telle que

(a) $Z(g)$ est ρ_h–separé et $\sup_{z\in\mathbb{D}} \rho_h(z, Z(g)) < +\infty$,

(b) $D^+_\chi(Z(g)) = D^-_\chi(Z(g)) = 1/(2\pi)$,

(c) $|f(z)| \asymp e^{h(z)}\rho_h(z, Z(g)), \quad z \in \mathbb{D}$.

Dans le *Chapitre III*, nous étudions le problème de l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ lorsque le poids h est à croissance rapide (vérifiant les mêmes conditions qu'au *Chapitre II*). Nous donnons une caractérisation complète des ensembles d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Notre résultat principal est le *Théorème III.1.1* suivant :

un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si Γ contient un ensemble Γ' ρ_h–séparé tel que $D^-_\chi(\Gamma') > 1/(2\pi)$.

Pour démontrer la suffisance de cette condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on raisonne par l'absurde en distinguant deux cas. Dans le premier cas, la majoration de la χ–densité d'un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ prouvée au *Chapitre II* donne la contradiction recherchée. Dans le second cas, on ramène notre problème à un ensemble de zéros pour un espace de Fock classique ; l'estimation de la densité de cet ensemble de zéros, qui résulte de la formule de Jensen, donne la contradiction recherchée.

Pour démontrer la nécessité de cette condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on adopte l'approche de Lyubarskii et Seip basée sur la fonction pic. A partir de la fonction de $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ d'ensemble de zéros de χ–densité maximale du *Chapitre II*, nous construisons pour tout $z \in \mathbb{D}$ assez proche du cercle unité, une fonction pic f_z qui vérifie dans un voisinage de z

$$|f_z(w)| \asymp e^{h(w)-|w-z|^2\Delta h(z)/4}$$

(voir la *Proposition III.3.4*). On se ramène ainsi au problème résolu par Seip de la caractérisation des suites d'échantillonnage pour les espaces de Fock classiques.

CHAPITRE I

Instabilité de Möbius pour les poids à croissance lente

I.1. Introduction

Soit $h : [0, 1[\to [0, +\infty[$ une fonction continue strictement croissante telle que $\lim_{r\to 1-} h(r) = +\infty$; h sera appelée un poids. Soit $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes f sur le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_h = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|e^{-h(|z|)} < +\infty.$$

On dit que $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ quand il existe $L > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_h \le L\ \|f|_\Gamma\|_h,$$

où $\|f|_\Gamma\|_h = \sup_{\zeta\in\Gamma} |f(\zeta)|e^{-h(|\zeta|)}$. La borne inférieure de telles constantes L est notée $L_h(\Gamma)$.

On dit que l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ satisfait la stabilité de Möbius lorsque tout ensemble Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ vérifie

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma)) < +\infty,$$

où pour tout $w \in \mathbb{D}$, Φ_w est la fonction de Möbius donnée par

$$\Phi_w(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

La distance pseudo-hyperbolique entre z et w de $\mathbb{D}$ est définie par $\rho(z, w) = |\Phi_w(z)|$. On dira que $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est hyperboliquement séparé si

$$\rho(\Gamma) = \inf\{\rho(z, w)\ :\ z, w \in \Gamma\ ,\ z \ne w\} > 0.$$

Seip dans **[20]** a montré que lorsque $h(r) = \alpha \ln \frac{1}{1-r^2}$, $\alpha > 0$, une suite $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si elle contient une suite Γ' hyperboliquement séparée telle que sa densité hyperbolique inférieure uniforme vérifie

$$D^-(\Gamma') = \varliminf_{r\to 1-}\ \inf_{w\in\mathbb{D}} \frac{\sum_{z\in\Phi_w(\Gamma'):\frac{1}{2}<|z|<r} |\ln|z||}{|\ln(1 - r)|} > \alpha. \tag{I.1.1}$$

Un élément essentiel de la preuve de Seip est le fait que l'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ satisfait la stabilité de Möbius. En effet, si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$, alors $L_h(\Phi_w(\Gamma)) = L_h(\Gamma)$ pour tout $w \in \mathbb{D}$.

Berndtsson et Ortega–Cerdà dans **[1]** ont montré que la *condition* (I.1.1) est nécessaire pour les poids h dont le laplacien $\Delta h(z) = h''(|z|) + h'(|z|)/|z|$ vérifie qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $1/C \leq (1-|z|^2)^2 \Delta h(z) \leq C$. Seip dans **[22]** a prouvé que la *condition* (I.1.1) est également suffisante pour ce type de poids, par exemple quand $h(r) = \alpha \ln \dfrac{1}{1-r^2} + \beta \ln\ln \dfrac{e}{1-r^2}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Domański et Lindström ont donné une autre preuve de ces résultats dans **[6]**.

Dans tout ce *Chapitre I*, nous supposerons que le poids $h \in \mathcal{C}^1$, $h'(0) = 0$ et

$$\lim_{r \to 1-} (1-r)h'(r) = 0. \tag{I.1.2}$$

Nous nous intéressons donc aux poids h à croissance lente tels que

$$\lim_{r \to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = 0.$$

On prendra pour exemples

$$h(r) = \beta \ln\ln \frac{e}{1-r^2},\ \beta > 0, \ \text{ ou } h(r) = a\Big(\ln \frac{e}{1-r^2}\Big)^b,\ a > 0, 0 < b < 1.$$

Pour de tels poids h, nous définissons la h–densité inférieure non–uniforme d'une suite $\Gamma \subset \mathbb{D}$ par

$$D_0^-(\Gamma, h) = \varliminf_{r \to 1-} \frac{\sum_{z \in \Gamma : 1/2 < |z| < r} |\ln|z||}{h(r)}.$$

La h–densité inférieure uniforme de Γ est définie par

$$D^-(\Gamma, h) = \varliminf_{r \to 1-} \inf_{w \in \mathbb{D}} \frac{\sum_{z \in \Phi_w(\Gamma) : 1/2 < |z| < r} |\ln|z||}{h(r)}.$$

Une condition nécessaire pour que Γ soit un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ est qu'il contienne un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' satisfaisant $D_0^-(\Gamma', h) > 1$. Réciproquement, nous donnons une condition suffisante précise d'échantillonnage dans le cas des suites régulièrement distribuées. Puis nous construisons un ensemble hyperboliquement séparé Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec $D^-(\Gamma, h) = 0$. Par conséquent, notre condition nécessaire d'échantillonnage n'est pas préservée par les fonctions de Möbius et la stabilité de Möbius de l'échantillonnage n'est pas vérifiée dans nos espaces généraux. D'autre part, il existe un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ dont la h–densité inférieure uniforme est infinie.

I.2. Condition nécessaire d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

Nous commençons par faire de simples observations.

Lemme I.2.1. *Soit h une fonction continue. Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble dénombrable Γ' qui est aussi un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec $L_h(\Gamma') = L_h(\Gamma)$.*

Démonstration. Soit Γ' un sous–ensemble dénombrable de Γ tel que l'adhérence de Γ' contient Γ. Soit $M > 1$ et $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Pour $z \in \Gamma$ tel que $f(z) \neq 0$, il existe $(z_j) \subset \Gamma'$ tel que z_j tend vers z quand $j \to +\infty$. Par continuité de h, pour tout j assez grand, $\left|f(z)e^{-h(|z|)} - f(z_j)e^{-h(|z_j|)}\right| \leq |f(z)|e^{-h(|z|)}/M$, et

$$|f(z)|e^{-h(|z|)} \leq |f(z_j)|e^{-h(|z_j|)} + \left|f(z)e^{-h(|z|)} - f(z_j)e^{-h(|z_j|)}\right| \leq \frac{1}{1-1/M}|f(z_j)|e^{-h(|z_j|)}.$$

D'où $L_h(\Gamma) \leq L_h(\Gamma') \leq (1-1/M)^{-1}L_h(\Gamma)$. Faisant $M \to +\infty$, notre résultat est prouvé. □

Puisque le disque unité est trivialement un ensemble d'échantillonnage, il existe un ensemble dénombrable d'échantillonnage pour tout $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme I.2.2. *Soit $\delta \in [0,1[$. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(z,w) \leq \delta$,*

$$1-\delta \leq \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|} \leq 1+\delta \quad et \quad \frac{1-\delta}{1+\delta} \leq \frac{1-|z|^2}{1-|w|^2} \leq \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Démonstration. On a

$$\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|} = \left|1 + \frac{\bar{z}w - |z|^2}{1-\bar{z}w}\right| = |1+\bar{z}\Phi_z(w)|$$

et

$$|1+\bar{z}\Phi_z(w)| \in [1-\rho(z,w), 1+\rho(z,w)] \subset [1-\delta, 1+\delta].$$

D'autre part, on a

$$\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|}\frac{|1-\bar{w}z|}{1-|w|^2},$$

d'où la conclusion par symétrie des rôles de z et w. □

Montrons maintenant le lemme de type Bernstein pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avant de donner des propriétés de l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme I.2.3. *Pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et pour $z, w \in \mathbb{D}$ avec $\rho(z,w) \leq 1/2$, nous avons*

$$\left|f(w)e^{-h(|w|)} - f(z)e^{-h(|z|)}\right| \leq c_h \,\|f\|_h\, \rho(z,w),$$

où $c_h = 4(\alpha_h + 2e^{\alpha_h})$ avec $\alpha_h = \sup_{r\in[0,1[}(1-r)h'(r)$.

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis comme dans la peuve du Lemme 5.1 [**11**, p.138]. Soient $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(z,w) \le 1/2$. On a

$$\begin{aligned}
\big|f(w)e^{-h(|w|)} - f(z)e^{-h(|z|)}\big| &\le \sup_{\eta\in[z,w]}\Big(\big|\frac{\partial}{\partial z}(fe^{-h})(\eta)\big| + \big|\frac{\partial}{\partial \bar z}(fe^{-h})(\eta)\big|\Big)|w-z| \\
&\le \sup_{\eta\in[z,w]}\Big(\frac{\alpha_h}{1-|\eta|}\|f\|_h + e^{-h(|\eta|)}\Big|\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta-\eta|=\frac{1-|\eta|}{2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\eta)^2}\,d\zeta\Big|\Big)|w-z| \\
&\le 2(\alpha_h + 2e^{\alpha_h})\|f\|_h \sup_{\eta\in[z,w]}\frac{|w-z|}{1-|\eta|^2} \qquad \le c_h\,\|f\|_h\,\rho(z,w),
\end{aligned}$$

d'après le *Lemme I.2.2* avec $\delta = 1/2$. □

Proposition I.2.4. *Pour $\Gamma \subset \mathbb{D}$ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, posons*

$$\delta_h(\Gamma) = \min\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{c_h L_h(\Gamma)}\Big),$$

où c_h est la constante du Lemme I.2.3. Soit $\tilde\Gamma \subset \mathbb{D}$; si

$$\rho(\Gamma,\tilde\Gamma) = \sup_{z\in\Gamma}\inf_{w\in\tilde\Gamma}\rho(z,w) < \delta_h(\Gamma),$$

alors

$$L_h(\tilde\Gamma) \le \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma,\tilde\Gamma)} < +\infty.$$

DÉMONSTRATION. On utilise la même méthode que dans la preuve du Lemme 5.15 [**11**, p.152–153], mais pour plus de clarté nous explicitons cette adaptation de démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et soit $\varepsilon \in]0, 1/2 - \rho(\Gamma,\tilde\Gamma)]$. Par définition de la borne supérieure, prenons $z \in \Gamma$ tel que $|f(z)|e^{-h(|z|)} \ge \|f|_\Gamma\|_h - \varepsilon$, ce qui implique $|f(z)|e^{-h(|z|)} \ge \|f\|_h/L_h(\Gamma) - \varepsilon$. Puis, par définition de la borne inférieure, prenons $w \in \tilde\Gamma$ tel que $\rho(z,w) \le \rho(z,\tilde\Gamma) + \varepsilon$, ce qui implique $\rho(z,w) \le \rho(\Gamma,\tilde\Gamma) + \varepsilon \le 1/2$. Le *Lemme I.2.3* donne

$$\big||f(w)|e^{-h(|w|)} - |f(z)|e^{-h(|z|)}\big| \le \big|f(w)e^{-h(|w|)} - f(z)e^{-h(|z|)}\big| \le c_h\|f\|_h\rho(z,w).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\|f|_{\tilde\Gamma}\|_h &\ge |f(w)|e^{-h(|w|)} \ge |f(z)|e^{-h(|z|)} - c_h\|f\|_h\rho(z,w) \\
&\ge \|f\|_h/L_h(\Gamma) - \varepsilon - c_h\|f\|_h\big(\rho(\Gamma,\tilde\Gamma) + \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers $0+$, nous avons

$$\|f|_{\tilde\Gamma}\|_h \ge \big(1/L_h(\Gamma) - c_h\rho(\Gamma,\tilde\Gamma)\big)\,\|f\|_h.$$

La définition de $L_h(\tilde{\Gamma})$ implique

$$1/L_h(\tilde{\Gamma}) \geq 1/L_h(\Gamma) - c_h\rho(\Gamma,\tilde{\Gamma}) \quad \text{et } L_h(\tilde{\Gamma}) \leq L_h(\Gamma)/\big(1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma,\tilde{\Gamma})\big).$$

□

Notons à partir d'ici K un ensemble quelconque.

Corollaire I.2.5. *Si $\Gamma = \{z_k\}_{k\in K}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors tout $\tilde{\Gamma} = \{w_k\}_{k\in K}$ satisfaisant $\rho(z_k, w_k) \leq \delta_h(\Gamma)/2$ pour tout $k \in K$, est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec*

$$L_h(\tilde{\Gamma}) \leq 2\, L_h(\Gamma).$$

Démonstration. Puisque $\rho(\Gamma,\tilde{\Gamma}) \leq \sup_{k\in K}\rho(z_k, w_k) \leq \delta_h(\Gamma)/2 < \delta_h(\Gamma)$ et que la fonction $x \mapsto L_h(\Gamma)/\big(1 - c_h L_h(\Gamma)x\big)$ est croissante sur $\big[0, \big(2c_h L_h(\Gamma)\big)^{-1}\big]$, la *Proposition I.2.4* nous donne

$$L_h(\tilde{\Gamma}) \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma,\tilde{\Gamma})} \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\delta_h(\Gamma)/2} \leq 2\, L_h(\Gamma).$$

□

Lemme I.2.6. *Pour tout $\delta \in]0,1[$, tout ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ au plus dénombrable contient Γ' vérifiant $\rho(\Gamma') \geq \delta$ et $\rho(\Gamma,\Gamma') \leq \delta$.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{z_J\}_{J\in\mathbb{N}}$. Construisons récursivement $\Gamma' = \{w_k\}_{k\in[0,\beta[\subset\mathbb{N}}$, où $w_k = z_{\sigma(k)}$ et σ est une application strictement croissante : $\sigma(0) = 0$; si σ est définie sur $[0, k-1]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors on pose

$$\sigma(k) = \inf\big\{J > \sigma(k-1) \,:\, \inf_{l<k}\rho(z_J, z_{\sigma(l)}) \geq \delta\big\}$$

et si $\sigma(k) = +\infty$, on pose $\beta = k$ et on arrête. Si β n'est pas défini au cours de ce processus, c'est que $\beta = +\infty$.

Γ' sous-ensemble de Γ vérifie $\rho(\Gamma') = \inf\limits_{k}\inf\limits_{l<k}\rho(w_k, w_l) \geq \delta$. D'autre part pour tout $J \in \mathbb{N}$, il existe $k \in [1, \beta+1[\cap\mathbb{N}$ tel que soit $J = \sigma(k-1)$ et alors $\inf\limits_{w\in\Gamma'}\rho(z_J, w) = \rho(z_J, z_J) = 0$, soit $J \in]\sigma(k-1), \sigma(k)[$ et alors $\inf\limits_{w\in\Gamma'}\rho(z_J, w) \leq \inf\limits_{l<k}\rho(z_J, z_{\sigma(l)}) < \delta$. Donc on a aussi $\rho(\Gamma,\Gamma') = \sup\limits_{J\in\mathbb{N}}\inf\limits_{w\in\Gamma'}\rho(z_J, w) \leq \delta$. □

Corollaire I.2.7. *Si Γ est un ensemble dénombrable d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' qui est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Le *Lemme I.2.6* appliqué avec $\delta = \delta_h(\Gamma)/2$ donne l'existence de $\Gamma' \subset \Gamma$ vérifiant $\rho(\Gamma') > 0$ et $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \delta_h(\Gamma)/2 < \delta_h(\Gamma)$. La *Proposition I.2.4* donne alors

$$L_h(\Gamma') \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma, \Gamma')} \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\delta_h(\Gamma)/2} \leq 2\, L_h(\Gamma).$$

□

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire en terme de h–densité inférieure non–uniforme afin qu'un sous–ensemble de $\mathbb{D}$ soit un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Théorème I.2.8. *Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' tel que Γ' est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $D_0^-(\Gamma', h) > 1$.*

La preuve de ce théorème nécessite le lemme suivant.

Lemme I.2.9. *Si $\Gamma = \{z_k\}_{k\in K}$ est un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, il existe $\tilde{\Gamma} = \{w_k\}_{k\in K}$ hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, tel que $0 \notin \tilde{\Gamma}$ et*

$$D_0^-(\Gamma, h) \geq \frac{1}{1-\delta_0}\, D_0^-(\tilde{\Gamma}, h) \tag{I.2.1}$$

pour un certain $\delta_0 \in]0,1[$.

Démonstration. Soit $\mu_\Gamma = \inf_{k\in K: z_k\neq 0} |z_k| \in]0,1[$. Pour tous $\delta \in]0,1[$ et $z \in \mathbb{D} \setminus \mu_\Gamma\mathbb{D}$,

$$\rho\Big(z, \frac{z}{|z|^\delta}\Big) = |z|^{1-\delta}\frac{1-|z|^\delta}{1-|z|^{2-\delta}} \leq \frac{1-|z|^\delta}{1-|z|^{2-\delta}} \leq \frac{1-{\mu_\Gamma}^\delta}{1-{\mu_\Gamma}^{2-\delta}}.$$

Donc

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_{z\in\mathbb{D}\setminus\mu_\Gamma\mathbb{D}} \rho\Big(z, \frac{z}{|z|^\delta}\Big) = 0,$$

et avec $\delta_1 = \min\big(\delta_h(\Gamma)/2, \rho(\Gamma)/4\big) \in]0,1[$, il existe $\delta_0 \in]0, \delta_1]$ tel que pour tout $z \in \Gamma \setminus \{0\}$, $\rho\Big(z, \frac{z}{|z|^{\delta_0}}\Big) \leq \delta_1$. Posons, pour tout $k \in K$,

$$w_k = \begin{cases} \frac{z_k}{|z_k|^{\delta_0}} & \text{si } z_k \neq 0 \\ \delta_0 & \text{si } z_k = 0. \end{cases}$$

$\tilde{\Gamma}$ possède les propriétés suivantes. Pour tout $k \in K$, on a

$$\rho(z_k, w_k) \leq \min\big(\delta_h(\Gamma)/2, \rho(\Gamma)/4\big).$$

D'une part le *Corollaire I.2.5* donne $L_h(\tilde{\Gamma}) < +\infty$, et donc $\tilde{\Gamma}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. D'autre part l'inégalité triangulaire pour la distance pseudohyperbolique ρ [**8**, p.4] donne que pour tous $k, l \in K$ tels que $z_k \neq z_l$,

$$\rho(\Gamma) \leq \rho(z_k, z_l) \leq \rho(z_k, w_k) + \rho(w_k, w_l) + \rho(w_l, z_l) \leq 2\rho(\Gamma)/4 + \rho(w_k, w_l),$$

donc, en passant aux bornes inférieures, $\rho(\tilde{\Gamma}) \geq \rho(\Gamma)/2 > 0$, et $\tilde{\Gamma}$ est hyperboliquement séparé.

Pour tout $r \in]1/2, 1[$ fixé, puisque $\delta_0 \leq \rho(\Gamma)/4 \leq 1/2$, pour $k \in K$ tel que $1/2 < |w_k| < r$, on a $z_k \neq 0$ et donc $w_k = \frac{z_k}{|z_k|^{\delta_0}}$; d'où les équivalences

$$1/2 < |w_k| < r \iff 1/2 < |z_k|^{1-\delta_0} < r \iff (1/2)^{\frac{1}{1-\delta_0}} < |z_k| < r^{1/(1-\delta_0)}.$$

Puisque pour $\delta_0 \in]0, 1[$, $\big(\forall x \in [0, 1[,\ x^{\frac{1}{1-\delta_0}} \leq x\,\big)$ implique $(1/2)^{\frac{1}{1-\delta_0}} \leq 1/2$ et $r^{\frac{1}{1-\delta_0}} \leq r$, il en résulte

$$\sum_{w_k \in \tilde{\Gamma}: 1/2 < |w_k| < r} |\ln|w_k|| \leq (1-\delta_0) \sum_{z_k \in \Gamma: 1/2 < |z_k| < r} |\ln|z_k|| + \sum_{z_k \in \Gamma: (1/2)^{\frac{1}{1-\delta_0}} < |z_k| \leq 1/2} \left|\ln\big(|z_k|^{1-\delta_0}\big)\right|,$$

d'où

$$\sum_{w_k \in \tilde{\Gamma}: 1/2 < |w_k| < r} |\ln|w_k||/h(r) \leq \frac{1-\delta_0}{h(r)} \sum_{z_k \in \Gamma: 1/2 < |z_k| < r} |\ln|z_k|| + \frac{\ln(2)\mathrm{Card}\big(\Gamma \cap (6/10)\mathbb{D}\big)}{h(r)}.$$

En faisant tendre r vers $1-$, on obtient bien $D_0^-(\Gamma, h) \geq D_0^-(\tilde{\Gamma}, h)/(1-\delta_0)$. □

Démonstration du Théorème. Nous allons considérer les produits finis de Blaschke modifiés par Seip [**20**, p.32]. D'après le *Lemme I.2.1* et le *Corollaire I.2.7*, nous pouvons supposer que $\Gamma = \{z_k\}_{k \in K}$ est hyperboliquement séparé. Il suffit alors de prouver que $D_0^-(\Gamma, h) > 1$. Soit le $\tilde{\Gamma}$ du *Lemme I.2.9*. Posons, pour $r < 1$,

$$f_r(z) = \prod_{w_k \in \tilde{\Gamma} \cap r\mathbb{D}} \frac{1}{|w_k|} \Phi_{w_k}(z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que $f_r \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, $\|f_r\|_h \geq |f_r(0)|e^{-h(0)} = e^{-h(0)} > 0$ et

$$\|f_r|_{\tilde{\Gamma}}\|_h \leq \sup_{w \in \tilde{\Gamma} \setminus r\mathbb{D}} e^{-h(|w|)} \prod_{|w_k| < r} \frac{1}{|w_k|} |\Phi_{w_k}(w)| \leq e^{-h(r)} \prod_{|w_k| < r} \frac{1}{|w_k|}.$$

$\tilde{\Gamma}$ étant d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$,

$$\|f_r\|_h \le L_h(\tilde{\Gamma})\, \|f_r|_{\tilde{\Gamma}}\|_h \ , \quad \text{et} \quad e^{-h(0)} \le L_h(\tilde{\Gamma})\, e^{-h(r)} \prod_{|w_k|<r} \frac{1}{|w_k|}.$$

On en déduit

$$\prod_{|w_k|<r} \frac{1}{|w_k|} \ge \frac{e^{-h(0)}}{L_h(\tilde{\Gamma})} e^{h(r)} > 0 \ \ \text{et} \quad \sum_{|w_k|<r} |\ln|w_k|| \ge \ln\bigl(e^{-h(0)}/L_h(\tilde{\Gamma})\bigr) + h(r),$$

d'où

$$D_0^-(\tilde{\Gamma}, h) \ge 1 + \varliminf_{r\to 1-} \frac{\ln\bigl(e^{-h(0)}/L_h(\tilde{\Gamma})\bigr) - \sum_{|w_k|\le 1/2} |\ln|w_k||}{h(r)} = 1.$$

D'après la *propriété* (I.2.1), $D_0^-(\Gamma, h) \ge (1-\delta_0)^{-1}\, 1 > 1$. □

I.3. Instabilité de Möbius de l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

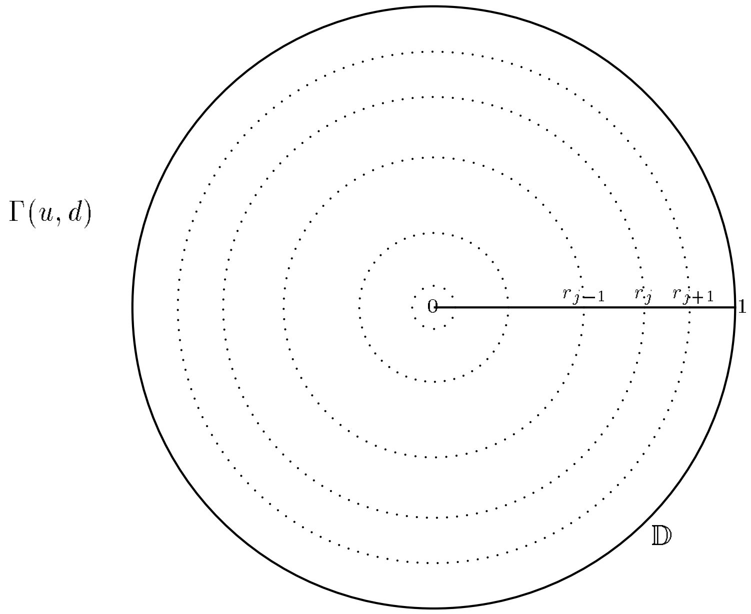
Maintenant nous allons étudier le cas des suites régulièrement distribuées. Nous allons donner à la fois une condition nécessaire et une condition suffisante en terme de séparation afin que ces suites soient des ensembles d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Soit $u = (r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $0 = r_0 < r_1 < ... < r_j \to 1-$. Soit $d > 0$. Posons

$$\Gamma_j(u,d) = \Bigl\{\ z \in \mathbb{D} : |z| = r_j \text{ et } z/|z| = e^{i2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)},\ 0 \le m \le [d^{-1}/(1-r_j)]\ \Bigr\},$$

$$\Gamma(u,d) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_j(u,d),$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.



Lemme I.3.1. *Si* $P = \sup_{j\in\mathbb{N}} e^{h(r_{j+1})-h(r_j)} < +\infty$*, alors* $\Gamma(u,d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ *pour tout* $d < \pi^{-1}\min\big(2^{-1},(c_h P)^{-1}\big)$*, où* c_h *est défini dans le Lemme I.2.3.*

Démonstration. Soit $\Gamma(u) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{z\in\mathbb{D} : |z| = r_j\}$. Nous estimons

$$\begin{aligned}
\rho(\Gamma(u),\Gamma(u,d)) &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{\theta\in[0,2\pi[}\inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1}\rho\big(r_j e^{i\theta}, r_j e^{i2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)}\big)\\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-r_j^2}\sup_{\theta\in[0,2\pi[}\inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1}\Big|1-e^{i\left(\theta-2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)\right)}\Big|\\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-r_j}\sup_{0\leq\theta<2\pi}\inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1}\big|\theta-2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)\big|\\
&\leq 2\pi d\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq t<[d^{-1}/(1-r_j)]+1}\inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1}|t-m| \qquad \leq \pi\, d.
\end{aligned}$$

Soit $z\in\mathbb{D}$; il existe $j\in\mathbb{N}$ tel que $r_j\leq|z|<r_{j+1}$. Pour $f\in\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, la croissance de h et le principe du maximum donnent

$$|f(z)|e^{-h(|z|)} \leq \sup_{|w|=r_{j+1}}|f(w)|e^{-h(r_j)} \leq P\,\|f|_{\Gamma(u)}\|_h.$$

Donc $L_h(\Gamma(u))\leq P$ et $\Gamma(u)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Si de plus $d<\pi^{-1}\min\big(2^{-1},(c_h P)^{-1}\big)$, alors

$$\rho(\Gamma(u),\Gamma(u,d)) \leq \pi\, d < \delta_h(\Gamma(u)).$$

D'après la *Proposition I.2.4*, $\Gamma(u,d)$ est aussi un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. □

La proposition suivante nous donne des exemples d'ensembles d'échantillonnage pour certains espaces $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Proposition I.3.2.

(a) *Si* $Q = \varliminf_{j\to+\infty} j/h(r_j) < +\infty$ *, alors pour tout* $d\geq 2\ln(2)\,Q$*,* $\Gamma(u,d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$*.*

(b) *Si* $u = \big(h^{-1}(j+h(0))\big)_{j\in\mathbb{N}}$*, alors on a à la fois* $P<+\infty$ *et* $Q<+\infty$*.*

(c) *Soit* $h_\beta(r) = \beta\ln\ln\frac{e}{1-r^2}$*,* $\beta>0$*, et soit la suite* $u_\beta = \big(1-2^{-2^j+1}\big)_{j\in\mathbb{N}}$*. Si* $d<38^{-1}15^{-\beta}$ *alors* $\Gamma(u_\beta,d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$*. Réciproquement, si* $d\geq\frac{2}{\beta}$ *alors* $\Gamma(u_\beta,d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$*.*

(d) *Soit* $h_{a,b}(r) = a\Big(\ln \dfrac{e}{1-r^2}\Big)^b$, $a>0$, $0<b<1$, *et soit la suite* $u_{a,b} = \big(1-2^{-j^{1/b}}\big)_{j\in\mathbb{N}}$. *Si* $d < 38^{-1}32^{-a}$ *alors* $\Gamma(u_{a,b},d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$. *Réciproquement, si* $d \geq \frac{2}{a}$ *alors* $\Gamma(u_{a,b},d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$.

Démonstration. (a). Soient u et $d>0$. Puisque $\lim_{j\to+\infty} r_j = 1-$, le lemme de Cesàro donne $\lim_{j\to+\infty}(j+1)^{-1}\sum_{l=0}^{j}(1-r_l) = 0$, et, avec $l_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_{l_0} > 1/2 \geq r_{l_0-1}$, on a

$$\begin{aligned}
D_0^-(\Gamma(u,d),h) &\leq \varlimsup_{j\to+\infty} \sum_{z\in\Gamma(u,d):1/2<|z|<r_{j+1}} \frac{|\ln|z||}{h(r_{j+1})} \\
&\leq \varlimsup_{j\to+\infty} \sum_{l=l_0}^{j} \frac{|\ln r_l|\big([d^{-1}/(1-r_l)]+1\big)}{h(r_{j+1})} \\
&\leq \varlimsup_{j\to+\infty} \sum_{l=0}^{j} \frac{2\ln(2)(1-r_l)\big(d^{-1}/(1-r_l)+1\big)}{h(r_{j+1})} \\
&\leq 2\ln(2)Q\Big(\frac{1}{d} + \varlimsup_{j\to+\infty}\sum_{l=0}^{j}\frac{1-r_l}{j+1}\Big) \quad \leq \frac{2\ln(2)Q}{d}.
\end{aligned}$$

Donc si $d \geq 2\ln(2)Q$, alors $D_0^-(\Gamma(u,d),h) \leq 1$, et d'après le *Théorème I.2.8*, $\Gamma(u,d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

(b). On a

$$P = \sup_{j\in\mathbb{N}} e^{(j+1+h(0))-(j+h(0))} = e < +\infty \qquad \text{et} \qquad Q = \varlimsup_{j\to+\infty} \frac{j}{j+h(0)} = 1 < +\infty.$$

(c). Soit $\beta > 0$. On a

$$\begin{cases} \alpha_{h_\beta} = \sup_{r\in[0,1[}(1-r)h_\beta{}'(r) = 2\beta\sup_{r\in[0,1[}\frac{r}{1+r}\frac{1}{\ln\frac{e}{1-r^2}} \leq \beta \\ c_{h_\beta} = 4(\alpha_{h_\beta}+2e^{\alpha_{h_\beta}}) \leq 4(\beta+2e^\beta) \leq 12e^\beta. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
P^{1/\beta} &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\ln\frac{e}{1-r_{j+1}}}{\ln\frac{e/2}{1-r_j}} \quad \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\ln(e2^{2^{j+1}-1})}{\ln(e2^{2^j-2})} \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{3\ln 2 - 1}{1-2\ln 2 + 2^j\ln 2} + 2 \quad \leq \frac{1+\ln 2}{1-\ln 2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\pi^{-1}\frac{1}{c_{h_\beta}P} \geq \frac{1}{12\pi e^\beta\Big(\frac{1+\ln 2}{1-\ln 2}\Big)^\beta} \geq 38^{-1}15^{-\beta},$$

et d'après le *Lemme I.3.1*, si $d < 38^{-1}15^{-\beta}$ alors $\Gamma(u_\beta, d)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$.

Réciproquement,

$$Q = \frac{1}{\beta} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\ln\ln\frac{e}{1-{r_j}^2}} = \frac{1}{\beta} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\ln\ln\left(2^{2^j-1}\right)} = \frac{1}{\beta} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\ln(2^j)} = \frac{1}{\beta\ln 2},$$

d'où, d'après le *point (a)*, si $d \geq 2/\beta$ alors $\Gamma(u_\beta, d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$.

(d). Soit $a > 0$, $0 < b < 1$. On a

$$\begin{cases} \alpha_{h_{a,b}} = \sup_{r\in[0,1[}(1-r){h_{a,b}}'(r) = 2ab\sup_{r\in[0,1[}\frac{r}{1+r}\left(\ln\frac{e}{1-r^2}\right)^{b-1} \leq ab \leq a \\ c_{h_{a,b}} = 4(\alpha_{h_{a,b}} + 2e^{\alpha_{h_{a,b}}}) \leq 4(a+2e^a) \leq 12e^a. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\ln P}{a} &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\left(\ln\frac{e}{1-r_{j+1}}\right)^b - \left(\ln\frac{e/2}{1-r_j}\right)^b\right) \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\left(\ln\left(e2^{(j+1)^{1/b}}\right)\right)^b - \left(\ln\left(\frac{e}{2}2^{j^{1/b}}\right)\right)^b\right) \\ &\leq (\ln 2)^b\sup_{j\in\mathbb{N}}\left((j+1)\left(1+\frac{1}{(j+1)^{1/b}\ln 2}\right)^b - j\right) \\ &\leq (\ln 2)^b(1+1/\ln 2) \quad \leq 1+1/\ln 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\pi^{-1}\frac{1}{c_{h_{a,b}}P} \geq \frac{1}{12\pi e^a e^{a(1+1/\ln 2)}} \geq 38^{-1}32^{-a},$$

et d'après le *Lemme I.3.1*, si $d < 38^{-1}32^{-a}$ alors $\Gamma(u_{a,b}, d)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$.

Réciproquement,

$$Q = \frac{1}{a} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\left(\ln\frac{e}{1-{r_j}^2}\right)^b} = \frac{1}{a} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\left(\ln\left(2^{j^{1/b}}\right)\right)^b} = \frac{1}{a(\ln 2)^b} \leq \frac{1}{a\ln 2},$$

d'où, d'après le *point (a)*, si $d \geq 2/a$ alors $\Gamma(u_{a,b}, d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$. $\square$

Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour l'espace $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}), \alpha > 0$, alors

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_\alpha(\Phi_w(\Gamma)) = L_\alpha(\Gamma) < +\infty,$$

où $L_\alpha(\Gamma) = L_h(\Gamma)$ avec $h(r) = \alpha\ln\frac{1}{1-r^2}$. Ceci résulte du fait que pour tout $w \in \mathbb{D}$, $T_{\Phi_w} : f \mapsto (\Phi'_w)^\alpha.f\circ\Phi_w$ est une isométrie de $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. Nous allons voir que cette propriété de stabilité de Möbius de l'échantillonnage n'est pas vérifiée pour nos espaces généraux. Le théorème suivant montre que la h–densité inférieure uniforme ne donne pas de condition nécessaire d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$; plus précisément

Théorème I.3.3. *Il existe Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que*

$$D^-(\Gamma, h) = 0.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1 - h^{-1}(h(r) + \ln 2)}{1-r} = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon \in [0,1[$ tel que pour tout $r \in [r_\varepsilon, 1[$, $h'(r) \leq \varepsilon/(1-r)$, donc en intégrant,

$$\begin{aligned} \frac{1 - h^{-1}(h(r) + \ln 2)}{1-r} &= \exp\Big(-\int_r^{h^{-1}(h(r)+\ln 2)} \frac{dx}{1-x}\Big) \\ &\leq \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^{h^{-1}(h(r)+\ln 2)} h'(x)\,dx\Big) \quad = \quad \exp\Big(-\frac{\ln 2}{\varepsilon}\Big). \end{aligned}$$

Soit la suite $u = (r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ récursivement définie par $r_0 = 0$ et $r_{j+1} = h^{-1}\big(h(r_j) + \ln 2\big)$. Alors u vérifie

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1 - r_{j+1}}{1 - r_j} = 0 \quad \text{et} \quad P = \sup_{j\in\mathbb{N}} e^{h(r_{j+1}) - h(r_j)} = 2 < +\infty.$$

Posons $\Gamma(u) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \big\{z \in \mathbb{D} : |z| = r_j\big\}$. Reprenons l'argumentation de Khôi et Thomas dans [**12**, p.442], afin de prouver que $D^-(\Gamma(u), h) = 0$. Fixons $r < 1$ et posons pour $j \in \mathbb{N}$,

$$w_j = 1 - \sqrt{(1-r_j)(1-r_{j+1})} \in]r_j, r_{j+1}[.$$

Ainsi pour $z \in \Gamma(u), |z| < w_j$, nous avons

$$\big|\Phi_{w_j}(z)\big| \geq \Big|\frac{w_j - r_j}{1 - w_j r_j}\Big| \geq \frac{(1-r_j) - (1-w_j)}{(1-r_j) + (1-w_j)} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}}{1 + \sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}} > r$$

pour $j \geq J(r)$, puisque $\lim_{j\to+\infty} \frac{1 - r_{j+1}}{1 - r_j} = 0$.
Similairement, pour $z \in \Gamma(u), |z| > w_j$,

$$\big|\Phi_{w_j}(z)\big| \geq \frac{(1-w_j) - (1-r_{j+1})}{(1-w_j) + (1-r_{j+1})} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}}{1 + \sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}} > r, \qquad \text{pour } j \geq J(r).$$

Donc, pour $\Phi_{w_{J(r)}}$, la somme numérateur dans l'expression de $D^-(\Gamma(u),h)$ est prise sur l'ensemble vide, d'où $D^-(\Gamma(u),h)=0$.

D'autre part, puisque $P=\sup_{j\in\mathbb{N}} e^{h(r_{j+1})-h(r_j)}<+\infty$, nous avons, d'après le *Lemme I.3.1*, que $\Gamma(u)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. □

Le lemme suivant est la version uniforme du *Théorème I.2.8*.

Lemme I.3.4. *Soit h un poids tel que tout ensemble Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ a la propriété*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma))<+\infty.$$

Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' tel que Γ' est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $D^-(\Gamma',h)>1$.

Démonstration. Reprenons notre preuve du *Théorème I.2.8*. On commence par supposer que $\Gamma=\{z_k\}_{k\in K}$ est hyperboliquement séparé. Alors le *Corollaire I.4.2* donne

$$\forall r\in[0,1[,\ \forall w\in\mathbb{D},\ \operatorname{Card}\big(\Phi_w\Gamma\cap r\mathbb{D}\big)\le C(\rho(\Gamma))\,\frac{1}{1-r}. \tag{I.3.1}$$

Soit une suite $(r_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ avec $1-\dfrac{1}{j+1}<r_j<1$ et une suite $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de Möbius, telles que

$$\frac{\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|\Phi_j(z_k)|<r_j}|\ln|\Phi_j(z_k)||}{h(r_j)}\le D^-(\Gamma,h)+\frac{1}{j}.$$

Posons $\Gamma_j=\Phi_j\Gamma=\{z_{j,k}\}_{k\in K}$ puis construisons de nouveaux ensembles de points $\widetilde{\Gamma_j}=\{w_{j,k}\}_{k\in K}$ en posant

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in K, w_{j,k}=\begin{cases}\frac{z_{j,k}}{|z_{j,k}|^{\delta_0}} & \text{si } |z_{j,k}|\ge\delta_0/2\\ \delta_0 & \text{si } z_{j,k}=0\\ \delta_0/2 & \text{si } |z_{j,k}|\in]0,\delta_0/2[,\end{cases}$$

où $\delta_0\in]0,\delta_1]$ est choisi tel que pour tout $z\in\mathbb{D}\setminus\frac{\delta_0}{2}\mathbb{D}$, $\rho\Big(z,\dfrac{z}{|z|^{\delta_0}}\Big)\le\delta_1=\min\Big(\dfrac{\delta_h(\Gamma)}{2},\dfrac{\rho(\Gamma)}{4}\Big)$. Alors les $\widetilde{\Gamma_j}$ vérifient

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in K,\ \rho(z_{j,k},w_{j,k})\le\min\big(\delta_h(\Gamma)/2,\rho(\Gamma)/4\big). \tag{I.3.2}$$

Le *Corollaire I.2.5* donne par conséquent $L_h(\widetilde{\Gamma_j}) \leq 2\, L_h(\Gamma_j)$; h vérifiant la condition de Möbius, $L_h(\Gamma_j) \leq M(\Gamma, h)$; d'où

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ L_h(\widetilde{\Gamma_j}) \leq c_0(\Gamma, h) < +\infty. \tag{I.3.3}$$

D'autre part l'inégalité triangulaire pour ρ et la *propriété* (I.3.2) donnent

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \rho(\widetilde{\Gamma_j}) \geq \rho(\Gamma)/2 > 0. \tag{I.3.4}$$

Enfin d'après (I.3.1), pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : 1/2 < |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}||}{h(r_j)} \leq (1 - \delta_0) \frac{\sum_{z_{j,k} \in \Gamma_j : 1/2 < |z_{j,k}| < r_j} |\ln |z_{j,k}||}{h(r_j)} + \frac{c_1(\Gamma)}{h(r_j)},$$

où $c_1(\Gamma) = C(\rho(\Gamma))\, \dfrac{\ln 2}{1 - 0,6} < +\infty$, ce qui implique

$$\frac{\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : 1/2 < |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}||}{h(r_j)} \leq (1 - \delta_0)\Big(D^-(\Gamma, h) + \frac{1}{j}\Big) + \frac{c_1(\Gamma)}{h(r_j)},$$

et donc en faisant tendre j vers $+\infty$,

$$D^-(\Gamma, h) \geq \frac{1}{1 - \delta_0} \varliminf_{j \to +\infty} \frac{\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : 1/2 < |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}||}{h(r_j)}. \tag{I.3.5}$$

Considérons alors les produits de Blaschke modifiés par Seip (qui sont finis d'après la *propriété* (I.3.4))

$$f_j(z) = \prod_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} \cap r_j \mathbb{D}} \frac{1}{|w_{j,k}|} \Phi_{w_{j,k}}(z), \qquad z \in \mathbb{D},\ j \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons

$$\|f_j\|_h \geq e^{-h(0)}\ , \qquad \|f_j|_{\widetilde{\Gamma_j}}\|_h \leq e^{-h(r_j)} \prod_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : |w_{j,k}| < r_j} \frac{1}{|w_{j,k}|}$$

et d'autre part, d'après la *propriété* (I.3.3),

$$\|f_j\|_h \leq c_0(\Gamma, h)\, \|f_j|_{\widetilde{\Gamma_j}}\|_h.$$

D'où

$$\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}|| \geq \ln \frac{e^{-h(0)}}{c_0(\Gamma, h)} + h(r_j).$$

Puisque d'après (I.3.1),

$$\sum_{w_{j,k}\in\widetilde{\Gamma_j}:|w_{j,k}|\leq 1/2} |\ln|w_{j,k}|| \quad \leq \operatorname{Card}\left(\widetilde{\Gamma_j}\cap(1/2)\overline{\mathbb{D}}\right)\,\ln(2/\delta_0)$$

$$\leq \operatorname{Card}\left(\Gamma_j\cap(1/2)^{1/(1-\delta_0)}\overline{\mathbb{D}}\right)\,\ln(2/\delta_0) \quad \leq C(\rho(\Gamma))\,\frac{\ln(2/\delta_0)}{1-\left((1/2)^{1/(1-\delta_0)}+1/10\right)},$$

nous avons, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{w_{j,k}\in\widetilde{\Gamma_j}:1/2<|w_{j,k}|<r_j} |\ln|w_{j,k}||\geq h(r_j)+c_2(\Gamma,h),$$

où $c_2(\Gamma,h)=\ln\dfrac{e^{-h(0)}}{c_0(\Gamma,h)}-C(\rho(\Gamma))\,\dfrac{\ln(2/\delta_0)}{9/10-(1/2)^{1/(1-\delta_0)}}$. Donc en faisant tendre j vers $+\infty$,

$$\varliminf_{j\to+\infty}\frac{\sum_{w_{j,k}\in\widetilde{\Gamma_j}:1/2<|w_{j,k}|<r_j}|\ln|w_{j,k}||}{h(r_j)}\geq 1+\varliminf_{j\to+\infty}\frac{c_2(\Gamma,h)}{h(r_j)}=1.$$

D'après la *propriété* (I.3.5), $D^-(\Gamma,h)\geq(1-\delta_0)^{-1}1>1$. □

Le *Lemme I.3.4* combiné au *Théorème I.3.3* donne finalement l'instabilité de Möbius de l'échantillonnage.

Corollaire I.3.5. *Il existe* Γ *ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ *tel que*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma))=+\infty.$$

Démonstration. D'après le *Théorème I.3.3*, il existe Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que $D^-(\Gamma,h)=0$. Mais par l'absurde, si h était tel que pour tout Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, $\sup\limits_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma))<+\infty$, alors d'après le *Lemme I.3.4*, Γ vérifierait $D^-(\Gamma,h)>1$ et donc on aurait $0>1$, ce qui est absurde. □

I.4. Comparaison avec l'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$

Le but de cette section est de montrer que tout ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ est aussi d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec une h–densité inférieure uniforme qui est infinie. Nous avons le lemme suivant.

Lemme I.4.1. *Soit* Γ *hyperboliquement séparé, soit* $0<\delta<\rho(\Gamma)/2$ *et soit* $v:[0,1[\to]0,+\infty[$ *une fonction continue satisfaisant* $\sup\limits_{\rho(z,w)\leq\delta}\dfrac{v(|z|)}{v(|w|)}<+\infty$. *Soit* $s\in\mathbb{R}$, $p>0$, f *holomorphe sur* $\mathbb{D}$ *et* $\mathbb{S}\subset\mathbb{D}$. *Alors*

$$\sum_{z_k\in\Gamma\cap\mathbb{S}}|f(z_k)|^p v(|z_k|)(1-|z_k|^2)^s\leq C\int_{\rho(z,\mathbb{S})<\rho(\Gamma)/2}|f(z)|^p v(|z|)(1-|z|^2)^{s-2}\,dm_2(z),$$

où m_2 est la mesure planaire de Lebesgue et C ne dépend que de δ, v et s.

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{D}$; la sous–harmonicité de $|f|^p \circ \Phi_z^{-1}$ et le *Lemme I.2.2* donnent

$$\begin{aligned}
|f(z)|^p &= |f|^p \circ \Phi_z^{-1}(0) \leq \frac{1}{\pi\delta^2}(1-|z|^2)^{-2}\int_{\rho(z,w)<\delta}|f(w)|^p\Big(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|}\Big)^4 dm_2(w)\\
&\leq \frac{1}{\pi\delta^2}\sup_{\rho(z,w)<\delta}\Big(\frac{v(|z|)}{v(|w|)}\Big(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\Big)^{s-2}\Big(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|}\Big)^4\Big)\times\\
&\qquad v(|z|)^{-1}(1-|z|^2)^{-s}\int_{\rho(z,w)<\delta}|f(w)|^p v(|w|)(1-|w|^2)^{s-2}\,dm_2(w)\\
&\leq C\,v(|z|)^{-1}(1-|z|^2)^{-s}\int_{\rho(z,w)<\delta}|f(w)|^p v(|w|)(1-|w|^2)^{s-2}\,dm_2(w).
\end{aligned}$$

Puisque $\{w \in \mathbb{D} : \rho(z_k,w) < \delta\} \cap \{w \in \mathbb{D} : \rho(z_l,w) < \delta\} = \emptyset$ quand $z_k \neq z_l \in \Gamma$, nous avons prouvé notre inégalité. □

Corollaire I.4.2. *Soit Γ hyperboliquement séparé. On a*

(a) *pour tout $r \in [0,1[$,* $\mathrm{Card}\,\big(\Gamma \cap r\mathbb{D}\big) \leq C(\rho(\Gamma))\dfrac{1}{1-r}$ *;*

(b) *pour tout $r \in [0,1[$,* $\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|z_k|<r}|\ln|z_k||/|\ln(1-r)| \leq \tilde{C}(\rho(\Gamma))$ *;*

(c) $D^-(\Gamma) \leq D_0^-(\Gamma) \leq \tilde{C}(\rho(\Gamma))$ *;*

(d) *pour tout $\varepsilon > 0$,* $\sum_{z_k\in\Gamma}(1-|z_k|)^{1+\varepsilon} < +\infty$.

Démonstration. Le *Lemme I.4.1* avec $\delta = \rho(\Gamma)/3$, $s = 0$, $v = f = 1$ et $\mathbb{S} = r\mathbb{D}$ donne le *point (a)*. Le *Lemme I.4.1* avec $\delta = \rho(\Gamma)/3$, $s = 1$, $v = f = 1$ et $\mathbb{S} = r\mathbb{D}\setminus\frac{1}{2}\overline{\mathbb{D}}$ donne le *point (b)*. Par passage à la limite inférieure dans l'*inégalité (b)*, on obtient le *point (c)*. Le *Lemme I.4.1* avec $\delta = \rho(\Gamma)/3$, $s = 1+\varepsilon$, $v = f = 1$ et $\mathbb{S} = \mathbb{D}$ donne le *point (d)*. □

Lemme I.4.3. *Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}), \alpha > 0$, alors Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que h vérifie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon \in [1/2, 1[$ tel que pour tout $r \in [r_\varepsilon, 1[$, $h'(r) \leq \varepsilon/(1-r)$, donc en intégrant,

$$\frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-r^2)/t}\right)}}{e^{h(r)}} = \exp\int_r^{\sqrt{1-(1-r^2)/t}} h'(x)dx \leq t^{2\varepsilon}, \qquad t \geq 1. \tag{I.4.1}$$

D'après le Théorème 1.1 [**20**, p.23], Γ contient une suite hyperboliquement séparée Γ' telle que $D^-(\Gamma') > \alpha$, et alors Γ' est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha'}(\mathbb{D})$ avec

$\alpha' = \min(\alpha, 1/2) < 1$. Ainsi nous pouvons supposer que Γ est un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ avec $\alpha < 1$. D'après la preuve du Théorème 7.1 [**20**, p.36–38], nous écrivons pour tout $f \in \mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$,

$$f(\zeta) = \sum_{z_k \in \Gamma} f(z_k) \Big(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - |\zeta|^2} \Big)^{\alpha} g_k(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

avec

$$|g_k(\zeta)| \leq C \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \bar{z}_k \zeta|^2}.$$

Nous en déduisons que

$$\|f\|_h \leq C \|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} e^{-h(|\zeta|)} (1 - |\zeta|^2)^{1-\alpha} \sum_{z_k \in \Gamma} e^{h(|z_k|)} \frac{(1 - |z_k|^2)^{1+\alpha}}{|1 - \bar{\zeta} z_k|^2}.$$

En outre, avec $v = e^h$ et $\delta = \rho(\Gamma)/5 \in]0, 1/5[$, notons que

$$\frac{\delta}{1-\delta} \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1-\delta}{\delta} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \Big(\frac{\delta}{1-\delta} \Big)^2} \right) \geq 1,$$

donc si $r \in [0, 1[$ alors

$$\begin{gathered} r \leq \frac{1-\delta}{\delta} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \Big(\frac{\delta}{1-\delta} \Big)^2} \right), \\ \Big(\frac{\delta}{1-\delta} \Big)^2 r^2 - \frac{2\delta}{1-\delta} r + \frac{1}{2} - \Big(\frac{\delta}{1-\delta} \Big)^2 \geq 0 \quad \text{et} \\ r + \frac{\delta}{1-\delta}(1 - r^2) \leq \sqrt{1 - (1 - r^2)/2}. \end{gathered}$$

D'où, d'après le *Lemme I.2.2* et l'*inégalité* (I.4.1) avec $t = 2$, pour tous $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(z, w) \leq \delta$,

$$\frac{v(|z|)}{v(|w|)} \leq \frac{e^{h\left(|w| + \frac{\delta}{1-\delta}(1-|w|^2)\right)}}{e^{h(|w|)}} \leq \frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-|w|^2)/2}\right)}}{e^{h(|w|)}} \leq \max\Big(2^{2\varepsilon}, e^{h\left(\sqrt{(1+r_\varepsilon^2)/2}\right) - h(0)} \Big),$$

la dernière inégalité venant en distinguant les cas $|w| > r_\varepsilon$ et $|w| \leq r_\varepsilon$. Pour $\zeta \in \mathbb{D}$ fixé, le *Lemme I.4.1* appliqué avec $s = 1 + \alpha$, $p = 2$, $f_\zeta(z) = 1/(1 - \bar{\zeta} z)$ et $\mathbb{S} = \mathbb{D}$, donne

$$\sum_{z_k \in \Gamma} e^{h(|z_k|)} \frac{(1 - |z_k|^2)^{1+\alpha}}{|1 - \bar{\zeta} z_k|^2} \leq C \int_{\mathbb{D}} e^{h(|z|)} \frac{1}{(1 - |z|^2)^{1-\alpha} |1 - \bar{\zeta} z|^2} \, dm_2(z).$$

Il en résulte, d'après le Théorème 1.7 [**11**, p.7], que pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D}) \subset \mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_h &\leq C\|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{1-\alpha}}{e^{h(|\zeta|)}} \int_0^1 \frac{e^{h(r)}}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta\ r\,dr}{|1-\zeta r e^{-i\theta}|^2} \\
&\leq C\|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{1-\alpha}}{e^{h(|\zeta|)}} \int_0^1 \frac{e^{h(r)}}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \frac{2r\,dr}{1-|\zeta|^2 r^2} \\
&\leq C\|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} I(\zeta),
\end{aligned}$$

où

$$I(\zeta) = \int_{1-|\zeta|^2}^{+\infty} \frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-|\zeta|^2)/t}\right)}}{e^{h(|\zeta|)}} \frac{dt}{(|\zeta|^2+t)t^\alpha}.$$

Montrons pour finir que $\sup_{\zeta\in\mathbb{D}} I(\zeta) < +\infty$. Prenons $\varepsilon = \alpha/4$. Si $|\zeta| > r_\varepsilon$, alors, d'après (I.4.1),

$$I(\zeta) \leq \int_{1-|\zeta|^2}^1 \frac{dt}{t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha/2}}{t^{1+\alpha}}\,dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}} < +\infty.$$

Si $|\zeta| \leq r_\varepsilon$, alors, d'après (I.4.1),

$$\begin{aligned}
I(\zeta) &\leq e^{-h(0)} \int_{1-r_\varepsilon^2}^{+\infty} \frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-r_\varepsilon^2)/t}\right)}}{t^{\alpha+1}}\,dt \\
&\leq e^{h(r_\varepsilon)-h(0)} \left(\int_{1-r_\varepsilon^2}^1 \frac{dt}{t^{1+\alpha}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}} \right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Théorème I.4.4. *Il existe un ensemble hyperboliquement séparé Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que $D^-(\Gamma, h) = +\infty$.*

Démonstration. Prenons Γ un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. D'après le *Lemme I.4.3*, Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et d'après le Théorème 1.1 [**20**, p.23], $D^-(\Gamma) > \alpha > 0$. Donc

$$\begin{aligned}
D^-(\Gamma, h) &= \varliminf_{r\to 1-} \inf_{w\in\mathbb{D}} \frac{\sum_{z\in\Phi_w(\Gamma):1/2<|z|<r} |\ln|z||}{h(r)} \frac{|\ln(1-r)|}{|\ln(1-r)|} \\
&\geq D^-(\Gamma) \lim_{r\to 1-} |\ln(1-r)|/h(r) = +\infty.
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE II

Séparation et ensemble de zéros pour les poids à croissance rapide

II.1. Introduction

Dans les espaces de type Bergman–Korenblum $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $h(r) = \alpha \ln \frac{1}{1-r^2}$, $\alpha > 0$, on peut extraire de toute suite d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$, une suite hyperboliquement séparée et d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. Considérons les poids h tels que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Nous remarquons qu'un ensemble hyperboliquement séparé ne peut être un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Donc nous introduisons un autre type de séparation des ensembles d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, comme dans **[17]**. Plus précisément, on étend h sur le disque unité $\mathbb{D}$ par $h(z) = h(|z|)$ et on pose

$$\rho_h(z,w) = |z-w|\sqrt{\Delta h}(\min(|z|,|w|)), \qquad z,w \in \mathbb{D}.$$

Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est dit ρ_h–séparé si

$$\rho_h(\Gamma) = \inf\{\rho_h(z,w) \ : \ z,w \in \Gamma \ , \ z \neq w\} > 0.$$

Nous montrons que de tout ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on peut extraire une suite ρ_h–séparée et d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Grâce aussi à cette notion de ρ_h–séparation, nous donnons des exemples de suites régulièrement distribuées qui sont d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Ensuite nous étudions les ensembles de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. On pose

$$\chi(r) = 1/\sqrt{\Delta h}(r) = (h''(r) + h'(r)/r)^{-1/2}.$$

Nous nous intéresserons aux poids h tels que

$$\begin{cases} h''(r)\chi^2(r) \to 1, \\ \chi(r) \text{ décroît vers } 0, \\ \chi'(r) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } r \to 1- . \end{cases} \tag{II.1.1}$$

Ces conditions impliquent que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Nous supposons que h satisfait l'une des deux conditions indépendantes suivantes

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad : \quad \sup_{r\in[0,1[} (1-r)|\chi'(r)|/\chi(r) < +\infty, \\ &(\mathrm{II}) \quad : \quad \lim_{r\to 1-} |\chi'(r)||\ln\chi(r)| = 0. \end{aligned}$$

Donnons pour exemples typiques de poids pour (I)

$$h(r) = \Big(\ln\frac{1}{1-r^2}\Big)\ln\ln\frac{e}{1-r^2}, \quad h(r) = \frac{1}{1-r^2};$$

et pour (II)

$$h(r) = \exp\frac{1}{1-r^2}, \quad h(r) = \exp\exp\frac{1}{1-r^2}.$$

On définit les χ–densités uniformes suivantes

$$D_\chi^-(\Gamma) = \underline{\lim}_{R\to+\infty}\ \underline{\lim}_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Card}\big(\Gamma\cap\mathbb{D}(w, R\chi(w))\big)}{\pi R^2},$$

$$D_\chi^+(\Gamma) = \overline{\lim}_{R\to+\infty}\ \overline{\lim}_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Card}\big(\Gamma\cap\mathbb{D}(w, R\chi(w))\big)}{\pi R^2}.$$

Lorsque Γ est ρ_h–séparé, nous remarquons que $D_\chi^-(\Gamma) < +\infty$. Nous montrons, grâce à la formule de Jensen, qu'un ensemble Γ de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ a une χ–densité inférieure uniforme qui vérifie $D_\chi^-(\Gamma) \le 1/(2\pi)$. Nous terminons ce chapitre par la construction d'une fonction $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ ayant une croissance contrôlée et d'ensemble de zéros de χ–densité maximale, comme dans [**24**] et [**15**]. Plus précisément

Théorème II.1.1. *Soit h un poids vérifiant la condition (I) ou (II). Il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$, d'ensemble de zéros Λ_h, telle que*

(a) *Λ_h est ρ_h–separé et* $\sup_{z\in\mathbb{D}} \rho_h(z,\Lambda_h) < +\infty$,

(b) $D_\chi^+(\Lambda_h) = D_\chi^-(\Lambda_h) = 1/(2\pi)$,

(c) $|f(z)| \asymp e^{h(z)}\rho_h(z,\Lambda_h), \quad z\in\mathbb{D}$.

II.2. Séparation

II.2.1. Echantillonnage et séparation hyperbolique. Dans cette sous–section, on va montrer qu'un ensemble hyperboliquement séparé n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme II.2.1. *Un poids h satisfaisant les conditions* (II.1.1) *vérifie les propriétés*

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1-r}{\chi(r)} = +\infty \quad et \quad \lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Démonstration. L'égalité des accroissements finis pour χ donne

$$\lim_{r\to 1-} \chi(r)/(1-r) = 0.$$

Puisque $\chi^{-2}(r) = \Delta h(r) = (rh')'(r)/r$,

$$\lim_{r\to 1-} \frac{(rh')'(r)}{1/(1-r)^2} = +\infty.$$

Donc en intégrant deux fois,

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h'(r)}{1/(1-r)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{\ln(1/(1-r))} = +\infty.$$

□

Le lemme suivant nous donne une minoration de la densité non–uniforme de Seip.

Lemme II.2.2. *Soit h un poids quelconque, et soit Γ un ensemble hyperboliquement séparé. Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors*

$$D_0^-(\Gamma) = \varliminf_{R\to 1-} \frac{\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|z_k|<R} |\ln|z_k||}{|\ln(1-R)|} \geq \lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|}.$$

Démonstration. Soit $\mu_\Gamma = \inf\{|z_k|,\ z_k \in \Gamma\setminus\{0\}\}$. Pour $r \in]1/2, 1[$ et $s \in]\max(3/4, 1-\mu_\Gamma), 1[$, considérons la fonction test

$$g_{r,s}(z) = \frac{z}{1-s} \prod_{z_k\in\Gamma:0<|z_k|<r} \frac{\Phi_{z_k}(z)}{\rho(z_k, 1-s)}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que $g_{r,s} \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, que

$$\|g_{r,s}\|_h \geq |g_{r,s}(1-s)|e^{-h(1-s)} = e^{-h(1-s)} \geq e^{-h(1/4)} > 0$$

et que

$$\sup_{\zeta\in\Gamma} |g_{r,s}(\zeta)|e^{-h(\zeta)} \leq \frac{e^{-h(r)}}{1-s} \prod_{0<|z_k|<r} \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)}.$$

Γ étant un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$,

$$0 < C_1 \leq \frac{e^{-h(r)}}{1-s} \prod_{0<|z_k|<r} \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)}, \tag{II.2.1}$$

avec C_1 indépendant de r, s.

Nous utilisons ensuite le fait que

$$\begin{aligned} \big|\rho(z_k, 1-s) - |z_k|\big| &= \left|\left|\frac{z_k - (1-s)}{1-\bar{z}_k(1-s)}\right| - |z_k|\right| \\ \leq \left|\frac{z_k - (1-s)}{1-\bar{z}_k(1-s)} - z_k\right| = \left|(1-s)\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k(1-s)}\right| &\leq \frac{8}{3}(1-s)(1-|z_k|) \end{aligned}$$

et le fait que, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour $z_k \in \mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \left|\ln \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)} - \ln \frac{1}{|z_k|}\right| &\leq \frac{\big|\rho(z_k, 1-s) - |z_k|\big|}{\min(\rho(1/2, 1-s), 1/2)} \\ \leq \frac{\big|\rho(z_k, 1-s) - |z_k|\big|}{\min(\rho(1/2, 1/4), 1/2)} &\leq \frac{7}{2}\big|\rho(z_k, 1-s) - |z_k|\big|. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+1}(1-r) < 1$,

$$\begin{aligned} &\sum_{z_k \in \Gamma \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D} : 2^n(1-r) < 1-|z_k| \leq 2^{n+1}(1-r)} \left|\ln \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)} - \ln \frac{1}{|z_k|}\right| \\ &\leq (56/3) 2^n (1-r)(1-s) \operatorname{Card}\big(\Gamma \cap (1 - 2^n(1-r))\mathbb{D}\big). \end{aligned}$$

Γ étant hyperboliquement séparé, le *Corollaire I.4.2* donne

$$\operatorname{Card}\big(\Gamma \cap (1 - 2^n(1-r))\mathbb{D}\big) \leq \frac{c_2}{2^n(1-r)},$$

où c_2 ne dépend que de $\rho(\Gamma)$. D'où

$$\sum_{z_k \in \Gamma \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D} : 2^n(1-r) < 1-|z_k| \leq 2^{n+1}(1-r)} \left|\ln \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)} - \ln \frac{1}{|z_k|}\right| \leq \frac{56}{3} c_2 (1-s).$$

Par sommation,

$$\sum_{z_k \in \Gamma : 1-r < 1-|z_k| < 1/2} \left(\ln \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)} - \ln \frac{1}{|z_k|}\right) \leq C_2 (1-s) \ln \frac{1}{1-r}, \tag{II.2.2}$$

où $C_2 = 56 c_2 / (3 \ln 2)$ ne dépend que de $\rho(\Gamma)$.

D'après (II.2.1) et (II.2.2), pour s fixé, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
D_0^-(\Gamma) &= \underline{\lim}_{r\to 1-} \frac{\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|z_k|<r} \ln \frac{1}{|z_k|}}{|\ln(1-r)|} \\
&\geq \underline{\lim}_{r\to 1-} \frac{\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|z_k|<r} \ln \frac{1}{\rho(z_k,1-s)}}{|\ln(1-r)|} - C_2(1-s) \\
&\geq \underline{\lim}_{r\to 1-} \frac{h(r)+\ln(C_1(1-s)) - \sum_{z_k\in\Gamma:0<|z_k|\leq 1/2} \ln \frac{1}{\rho(z_k,1-s)}}{|\ln(1-r)|} - C_2(1-s) \\
&= \underline{\lim}_{r\to 1-} h(r)/|\ln(1-r)| - C_2(1-s).
\end{aligned}$$

Puisque s peut être choisi arbitrairement proche de 1, nous concluons que

$$D_0^-(\Gamma) \geq \underline{\lim}_{r\to 1-} h(r)/|\ln(1-r)|.$$

□

Corollaire II.2.3. *Soit h un poids satisfaisant les conditions* (II.1.1)*. Si Γ est une suite hyperboliquement séparée, alors Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.*

Démonstration. D'une part, le *Lemme II.2.1* donne $\lim_{r\to 1-} h(r)/|\ln(1-r)| = +\infty$. D'autre part, Γ étant hyperboliquement séparé, d'après le *Corollaire I.4.2*, la densité $D_0^-(\Gamma)$ est finie. Donc, d'après le *Lemme II.2.2*, Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. □

Remarque II.2.4. On peut aussi démontrer le *Corollaire II.2.3* en utilisant à la place du *Lemme II.2.2*, le théorème d'interpolation de Seip **[20]** pour les espaces de type Bergman–Korenblum. En effet, d'une part, d'après le *Lemme II.2.1*, $\lim_{r\to 1-} h(r)/|\ln(1-r)| = +\infty$, et

$$\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{A}_h(\mathbb{D}), \qquad \alpha > 0.$$

D'autre part, Γ étant hyperboliquement séparé, d'après le *Corollaire I.4.2*, la densité

$$D^+(\Gamma) = \overline{\lim}_{r\to 1-} \sup_{\Phi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})} \frac{\sum_{z\in\Phi(\Gamma'):\frac{1}{2}<|z|<r} |\ln|z||}{|\ln(1-r)|} < +\infty,$$

et il existe $\alpha > 0$ tel que $D^+(\Gamma) < \alpha$. Le théorème d'interpolation de Seip **[20]** donne que Γ est un ensemble d'interpolation, donc aussi de zéros, pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Il en résulte que Γ est un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, et donc Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

II.2.2. Echantillonnage et ρ_h–séparation. Commençons par les lemmes suivants dont nous avons besoin afin de donner des propriétés de l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme II.2.5. *Un poids h satisfaisant les conditions* (II.1.1) *est tel que pour tout $K \in \mathbb{R}$,*

$$\chi(r + K\chi(r)) = (1 + o(1))\chi(r), \quad r \to 1- .$$

DÉMONSTRATION. D'après le *Lemme II.2.1*, on a $r + |K|\chi(r) < 1, \quad r \to 1-$.
Il suffit alors d'appliquer l'égalité des accroissements finis à χ pour conclure. □

En conséquence des *Lemmes II.2.1 et II.2.5*, un poids h satisfaisant les *conditions* (II.1.1) vérifie les propriétés suivantes

$$A_h = \inf_{0 \le r < 1} (1 - r)/(2\chi(r)) > 0 \tag{II.2.3}$$

et

$$B_h = \sup_{0 \le r < 1} \chi(r)/\chi(r + A_h\chi(r)) < +\infty. \tag{II.2.4}$$

Lemme II.2.6. *Pour tous $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho_h(z, w) \le A_h$, nous avons*

$$1/B_h \le \chi(z)/\chi(w) \le B_h.$$

DÉMONSTRATION. D'après la *propriété* (II.2.4),

$$\chi(z)/\chi(w) \le \chi(z)/\chi(|z| + A_h\chi(z)) \le B_h.$$

□

Nous avons aussi besoin du lemme suivant qui résulte de la formule de Green (pour la preuve voir par exemple [**11**, p.60]). On notera $\mathbb{D}(z, R)$ le disque de $\mathbb{C}$ de centre z et de rayon R (donc $\mathbb{D}(0, R) = R\mathbb{D}$).

Lemme II.2.7. *Soit $f \in \mathcal{C}^2(r\overline{\mathbb{D}})$, $r > 0$. Alors pour tout $z \in r\mathbb{D}$,*

$$\frac{2}{\pi}\int_{|w|<r} \ln\Big|\frac{r(z-w)}{r^2 - z\overline{w}}\Big|\Delta f(w)\, dm_2(w) = f(z) - \frac{1}{2\pi r}\int_{|w|=r} \frac{r^2 - |z|^2}{|z - w|^2} f(w)\, |dw|.$$

Le lemme suivant est de type Bernstein.

Lemme II.2.8. *Soient $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tels que $\rho_h(z_1, z_2) \le A_h$. Alors*

$$\big||f(z_2)|e^{-h(z_2)} - |f(z_1)|e^{-h(z_1)}\big| \le c_h\|f\|_h \rho_h(z_1, z_2),$$

où $c_h = (B_h/A_h)\big(1 + 2A_h^2B_h^2(1 + B_h)^2\big)e^{A_h^2B_h^2(1+B_h)^2/4}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $|z_1| \le |z_2|$. Alors nous avons

$$\rho_h(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|/\chi(z_1).$$

En appliquant le *Lemme II.2.6* deux fois, nous trouvons un disque $\mathbb{D}(z_1, r)$ centré en z_1 et de rayon $r = (1 + 1/B_h)A_h\chi(z_1)$, tel que $\overline{\mathbb{D}}(z_1, r) \subset \mathbb{D}$ et

$$1/B_h^2 \le \chi(\zeta)/\chi(z_1) \le B_h^2, \qquad \zeta \in \mathbb{D}(z_1, r).$$

Considérons la fonction

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}(z_1,r)} \chi(\zeta)^{-2} \ln \frac{r(z-\zeta)}{r^2 - (z - z_1)(\bar{\zeta} - \bar{z_1})}\, dm_2(\zeta),$$

et le disque $\mathbb{D}(z_1, r_1)$ centré en z_1 et de rayon $r_1 = A_h\chi(z_1)$. Notons que $z_2 \in \overline{\mathbb{D}}(z_1, r_1) \subset \mathbb{D}(z_1, r)$. Alors d'après la formule de Green, nous avons, pour $z \in \mathbb{D}(z_1, r)$, avec $w = (z - z_1)/r \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
0 \le\ -\operatorname{Re} U(z) \ &\le\ \frac{B_h^4}{2\pi}\chi(z_1)^{-2}\int_{\mathbb{D}(z_1,r)} -\ln\left|\frac{r(z-\zeta)}{r^2-(z-z_1)(\bar{\zeta}-\bar{z_1})}\right| dm_2(\zeta)\\
&\le\ \frac{B_h^4}{2\pi}\chi(z_1)^{-2}r^2\int_{\mathbb{D}} -\ln\left|\frac{w-\zeta}{1-w\bar{\zeta}}\right| dm_2(\zeta) \ =\ \frac{B_h^2(1+B_h)^2A_h^2}{2\pi}\frac{\pi}{2}(1-|w|^2)\\
&\le\ B_h^2(1+B_h)^2A_h^2/4 \quad = C_0.
\end{aligned}$$

De plus, pour $z \in \mathbb{D}(z_1, r_1)$, $\zeta \in \mathbb{D}(z_1, r)$, nous avons

$$1/2 \le r^2/|r^2 - (z - z_1)(\bar{\zeta} - \bar{z_1})| \le 1 + B_h,$$

et donc

$$\begin{aligned}
|U'(z)| \ &=\ \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{D}(z_1,r)} \chi(\zeta)^{-2}\Big(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{\bar{\zeta}-\bar{z_1}}{r^2-(z-z_1)(\bar{\zeta}-\bar{z_1})}\Big)\, dm_2(\zeta)\right|\\
&\le\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}(z_1,r)} \chi(\zeta)^{-2}\frac{r^2-|\zeta-z_1|^2}{|z-\zeta||r^2-(z-z_1)(\bar{\zeta}-\bar{z_1})|}\, dm_2(\zeta)\\
&\le\ \frac{B_h^4}{2\pi}(1+B_h)\chi(z_1)^{-2}\int_{\mathbb{D}(z_1,r)} \frac{dm_2(\zeta)}{|z-\zeta|}\\
&\le\ \frac{A_hB_h^3(1+B_h)^2}{2\pi\chi(z_1)}\int_{\mathbb{D}} \frac{dm_2(\zeta)}{|w-\zeta|}\\
&\le\ \frac{A_hB_h^3(1+B_h)^2}{2\pi\chi(z_1)}\int_{\mathbb{D}(w,2)} \frac{dm_2(\zeta)}{|w-\zeta|}\\
&\le\ C_1/\chi(z_1),
\end{aligned}$$

avec $C_1 = 2A_h B_h^3 (1+B_h)^2$. D'où

$$|U(z_2) - U(z_1)| \leq |z_2 - z_1| \sup_{\mathbb{D}(z_1,r_1)} |U'| \leq C_1 \rho_h(z_1, z_2).$$

Soit $v = h - \operatorname{Re} U$, puisque

$$v(z) = v(rw + z_1) = h(rw + z_1) - \int_{\mathbb{D}} r^2 \Delta h(r\zeta + z_1) \ln\Big|\frac{w-\zeta}{1-w\bar{\zeta}}\Big| \frac{dm_2(\zeta)}{2\pi},$$

v est harmonique sur $\mathbb{D}(z_1, r)$ d'après le *Lemme II.2.7*, et v coïncide avec h sur $\partial\mathbb{D}(z_1, r)$. Notons $\tilde{v}$ la fonction conjuguée de v sur $\mathbb{D}(z_1, r)$ et posons $V = v + i\tilde{v}$ puis $g = fe^{-V}$. Sans perte de généralité, supposons que $\|f\|_h = 1$. Alors nous avons, pour $z \in \mathbb{D}(z_1, r)$,

$$|g(z)| = |f(z)| e^{-v(z)} \leq \|f\|_h e^{\sup_{\mathbb{D}(z_1,r)} \operatorname{Re} U} \leq 1.$$

De plus, g étant holomorphe, la formule de Cauchy donne, pour $z \in \mathbb{D}(z_1, r_1)$,

$$|g'(z)| \leq \frac{\sup_{\partial\mathbb{D}(z_1,r)} |g|}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - we^{-i\theta}|^2} \leq \frac{1/r}{1-|w|^2} \leq \frac{1/r}{1 - r_1/r} \leq C_3/\chi(z_1),$$

avec $C_3 = B_h/A_h$. D'où

$$|g(z_2) - g(z_1)| \leq |z_2 - z_1| \sup_{\mathbb{D}(z_1,r_1)} |g'| \leq C_3 \rho_h(z_1, z_2).$$

On en déduit finalement

$$\begin{aligned}
\big||f(z_2)|e^{-h(z_2)} - |f(z_1)|e^{-h(z_1)}\big| &= \big||g(z_2)|e^{-\operatorname{Re} U(z_2)} - |g(z_1)|e^{-\operatorname{Re} U(z_1)}\big| \\
&\leq e^{\sup_{\mathbb{D}(z_1,r)}(-\operatorname{Re} U)} |U(z_2) - U(z_1)| \sup_{\mathbb{D}(z_1,r)} |g| + |g(z_2) - g(z_1)| e^{\sup_{\mathbb{D}(z_1,r)}(-\operatorname{Re} U)} \\
&\leq e^{C_0} C_1 \rho_h(z_1, z_2) + e^{C_0} C_3 \rho_h(z_1, z_2) \\
&\leq c_h \|f\|_h \rho_h(z_1, z_2),
\end{aligned}$$

avec $c_h = e^{C_0}\big(C_1 + C_3\big) = (B_h/A_h)\big(1 + 2A_h^2 B_h^2 (1+B_h)^2\big) e^{A_h^2 B_h^2 (1+B_h)^2/4}$. □

Nous avons alors, de la même manière que dans le *Chapitre I Section I.2*, les résultats suivants.

Proposition II.2.9. *Pour Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, posons*

$$\delta_h(\Gamma) = \min\Big(A_h, \frac{1}{c_h L_h(\Gamma)}\Big),$$

où c_h est la constante du Lemme II.2.8. Soit $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{D}$; si

$$\rho_h(\Gamma, \tilde{\Gamma}) = \sup_{z\in\Gamma} \inf_{w\in\tilde{\Gamma}} \rho_h(z, w) < \delta_h(\Gamma),$$

alors

$$L_h(\tilde{\Gamma}) \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho_h(\Gamma, \tilde{\Gamma})} < +\infty.$$

DÉMONSTRATION. On reprend la preuve de la *Proposition I.2.4* : on remplace ρ par ρ_h, on prend $\varepsilon \in]0, A_h - \rho_h(\Gamma, \tilde{\Gamma})]$ et on utilise le *Lemme II.2.8* à la place du *Lemme I.2.3*. □

Corollaire II.2.10. *Si $\Gamma = \{z_k\}_k$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors $\tilde{\Gamma} = \{w_k\}_k$ satisfaisant $\rho_h(z_k, w_k) \leq \delta_h(\Gamma)/2$ pour tout k, est aussi un ensemble d'échantillonnage avec $L_h(\tilde{\Gamma}) \leq 2\, L_h(\Gamma)$.*

DÉMONSTRATION. Corollaire immédiat de la *Proposition II.2.9.* □

Lemme II.2.11. *Pour tout $\delta \in]0,1[$, tout ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ au plus dénombrable contient Γ' vérifiant $\rho_h(\Gamma') \geq \delta$ et $\rho_h(\Gamma, \Gamma') \leq \delta$.*

DÉMONSTRATION. C'est la même preuve que celle du *Lemme I.2.6* en remplaçant ρ par ρ_h. □

Corollaire II.2.12. *Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble Γ' ρ_h–séparé tel que Γ' est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.*

DÉMONSTRATION. Corollaire du *Lemme I.2.1* et de la *Proposition II.2.9* combinée au *Lemme II.2.11.* □

II.2.3. ρ_h–séparation et χ–densité. Dans cette sous–section, nous montrons que notre χ–densité (définie dans l'*introduction II.1*) pour une suite ρ_h–séparée est finie.

Lemme II.2.13. *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ et pour tout $r \leq \rho_h(z_1, z_2)/2$, nous avons*

$$\mathbb{D}(z_1, r\chi(z_1)) \cap \mathbb{D}(z_2, r\chi(z_2)) = \emptyset.$$

DÉMONSTRATION. Si $w \in \mathbb{D}(z_1, r\chi(z_1)) \cap \mathbb{D}(z_2, r\chi(z_2))$, alors

$$\rho_h(z_1, z_2) \ \leq \frac{|z_1 - w| + |w - z_2|}{\chi\big(\min(|z_k|, |z_l|)\big)} \leq \frac{|z_1 - w|}{\chi(z_1)} + \frac{|z_2 - w|}{\chi(z_2)} \ < 2r \leq \rho_h(z_1, z_2),$$

ce qui est absurde. □

Lemme II.2.14. *Soient $s, t \in \mathbb{R}$, $p \in]0, +\infty[$, f holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $r \in]0, A_h]$, où A_h est défini par* (II.2.3). *Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,*

$$|f(z)|^p (1 - |z|)^s \chi^t(z) \leq C \int_{\mathbb{D}(z, r\chi(z))} |f(w)|^p (1 - |w|)^s \chi^{t-2}(w)\, dm_2(w),$$

où C ne dépend que de h, r, s, t.

DÉMONSTRATION. D'après la *propriété* (II.2.3) de χ, nous avons

$$r\chi(z) \leq A_h\chi(z) \leq (1-|z|)/2,$$

et donc $1/2 \leq (1-|w|)/(1-|z|) \leq 3/2$, $w \in \mathbb{D}(z, r\chi(z))$. La sous–harmonicité de $|f|^p$ et le *Lemme II.2.6* donnent alors notre assertion. □

Lemme II.2.15. *Soient Γ une suite ρ_h–séparée, $s,t \in \mathbb{R}$, $p > 0$, et soit f holomorphe sur $\mathbb{D}$. Alors*

$$\sum_{z_k\in\Gamma} |f(z_k)|^p(1-|z_k|)^s\chi^t(z_k) \leq C\int_{\Omega_{h,\Gamma}} |f(z)|^p(1-|z|)^s\chi^{t-2}(z)\, dm_2(z),$$

où $\Omega_{h,\Gamma} = \bigcup_{z\in\Gamma} \mathbb{D}(z, \tilde{A}_h\chi(z))$, $\tilde{A}_h = \min(A_h, \rho_h(\Gamma)/2)$, et C ne dépend que de $h, \rho_h(\Gamma), s, t$.

DÉMONSTRATION. Les *Lemmes II.2.13 et II.2.14* appliqués à $z_k \in \Gamma$ donnent par sommation

$$\begin{aligned}\sum_{z_k\in\Gamma} |f(z_k)|^p(1-|z_k|)^s\chi^t(z_k) &\leq C\sum_{z_k\in\Gamma}\int_{\mathbb{D}(z_k,\tilde{A}_h\chi(z_k))} |f(z)|^p(1-|z|)^s\chi^{t-2}(z)\, dm_2(z)\\ &\leq C(h,\rho_h(\Gamma),s,t)\int_{\Omega_{h,\Gamma}} |f(z)|^p(1-|z|)^s\chi^{t-2}(z)\, dm_2(z).\end{aligned}$$

□

Proposition II.2.16. *Si Γ est ρ_h–séparé, alors*

(a) *pour tout $r < 1$,* $\operatorname{Card}\left(\Gamma \cap r\mathbb{D}\right) \leq C(h,\rho_h(\Gamma))\, h'(r)$;

(b) *pour tout $\varepsilon > 0$,* $\sum_{z_k\in\Gamma}(1-|z_k|)^{-1+\varepsilon}\chi^2(z_k) < +\infty$;

(c) $D^-_\chi(\Gamma) \leq D^+_\chi(\Gamma) < +\infty$.

DÉMONSTRATION. (a). Nous appliquons le *Lemme II.2.15* à $\Gamma \cap r\mathbb{D}$ avec $s,t = 0$, $p = 1$, $f = 1$ (et $\Omega_{h,\Gamma} \subset (r + A_h\chi(r))\mathbb{D}$), pour obtenir

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\left(\Gamma\cap r\mathbb{D}\right) = \sum_{z_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} 1 &\leq C\int_{(r+A_h\chi(r))\mathbb{D}} \chi^{-2}(z)\, dm_2(z) \;\leq C\int_0^{r+A_h\chi(r)} \chi^{-2}(x)x\, dx\\ &\leq C + C\int_{1/2}^{r+A_h\chi(r)} \chi^{-2}(x)x\, dx,\end{aligned}$$

avec $C = C(h, \rho_h(\Gamma))$. D'après le *Lemme II.2.6*, il existe $c > 0$ tel que pour tout $r \in [0, 1[$, $1/c \leq \chi(r \pm A_h\chi(r))/\chi(r) \leq c$. Donc

$$\int_{1/2}^{r+A_h\chi(r)} \chi^{-2}(x)x\,dx \leq C\int_{1/2}^{r} \chi^{-2}(x)x\,dx \leq C\int_{1/2}^{r}(xh')'(x)\,dx \leq Ch'(r),$$

et notre assertion est prouvée.

(b). Le *Lemme II.2.15* appliqué à Γ avec $t = 2$, $s = -1+\varepsilon$, $p = 1$, $f = 1$, donne

$$\sum_{z_k\in\Gamma}(1-|z_k|)^{-1+\varepsilon}\chi^2(z_k) \leq C\int_{\mathbb{D}}(1-|z|)^{-1+\varepsilon}\,dm_2(z) < +\infty.$$

(c). Nous appliquons le *Lemme II.2.15* à $\Gamma\cap\mathbb{D}(w, R\chi(w))$ avec $s, t = 0$, $p = 1$, $f = 1$ (et $\Omega_{h,\Gamma} \subset \mathbb{D}(w, R\chi(w) + A_h\chi(|w| - R\chi(w))))$, pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\left(\Gamma\cap\mathbb{D}(w, R\chi(w))\right) &= \sum_{z_k\in\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} 1 \leq C\int_{\mathbb{D}(w,R\chi(w)+A_h\chi(|w|-R\chi(w)))}\chi^{-2}(z)\,dm_2(z)\\ &\leq C\pi\frac{(R\chi(w)+A_h\chi(|w|-R\chi(w)))^2}{\chi^2(|w|+R\chi(w)+A_h\chi(|w|-R\chi(w)))},\end{aligned}$$

avec $C = C(h, \rho_h(\Gamma))$. Puisque, d'après le *Lemme II.2.5*,

$$\begin{aligned}\frac{R\chi(w)+A_h\chi(|w|-R\chi(w))}{\chi(|w|+R\chi(w)+A_h\chi(|w|-R\chi(w)))} &\leq 2R+2A_h, \quad |w|\to 1-,\\ &\leq 3R, \quad R\to+\infty,\end{aligned}$$

notre assertion est prouvée. □

II.3. Echantillonnage et suites régulièrement distribuées

Dans cette section, on va donner des exemples explicites d'ensembles qui sont d'échantillonnage et d'ensembles qui ne sont pas d'échantillonnage, en utilisant des techniques élémentaires pour les suites régulièrement distribuées.

Soit $u = (r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $0 = r_0 < r_1 ... < r_j \to 1-$ et soit $d > 0$. Posons

$$\Gamma_j(u,d) = \left\{\, z\in\mathbb{D} \;:\; |z| = r_j \text{ et } z/|z| = e^{i2\pi m/([d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1)},\ 0\leq m\leq [d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]\,\right\},$$

$$\Gamma(u,d) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Gamma_j(u,d).$$

Lemme II.3.1. *Si* $\sup_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j, r_{j+1}) \leq \frac{1}{2}\min\Big(A_h, \frac{1}{c_h}\Big)$, *où* c_h *est la constante du Lemme II.2.8, et si* $d \leq (2\pi)^{-1}$, *alors* $\Gamma(u,d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, *avec* $L_h(\Gamma(u,d)) \leq 4$.

Démonstration. Considérons d'abord l'ensemble

$$\Gamma(u)=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{D}:|z|=r_j\}.$$

Puisque $\mathbb{D}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $\rho_h(\mathbb{D},\Gamma(u))\leq\sup_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1})$, si

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1})\leq\frac{1}{2}\min\Big(A_h,\frac{1}{c_h}\Big)<\delta_h(\mathbb{D}),$$

alors, d'après la *Proposition II.2.9*, $\Gamma(u)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $L_h(\Gamma(u))\leq 2$.

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}\rho_h(\Gamma(u),\Gamma(u,d)) &\leq \sup_{j\in\mathbb{N},\theta\in[0,2\pi[}\ \inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1}\rho_h\Big(r_je^{i\theta},r_je^{i2\pi m/([d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1)}\Big)\\ &\leq \sup_j\chi(r_j)^{-1}\sup_\theta\ \inf_{m\leq[d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1}\Big|1-e^{i\big(\theta-2\pi m/([d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1)\big)}\Big|\\ &\leq \sup_j\chi(r_j)^{-1}\sup_\theta\ \inf_{m\leq[d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1}\big|\theta-2\pi m/([d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1)\big|\\ &\leq \pi d\sup_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1}) \qquad\leq\frac{d\pi}{2}\min\Big(A_h,\frac{1}{c_h}\Big).\end{aligned}$$

Donc, d'après la *Proposition II.2.9*, pour

$$d\leq\frac{1}{2\pi}<\frac{2\,\delta_h(\Gamma(u))}{\pi\min\big(A_h,\frac{1}{c_h}\big)},$$

$\Gamma(u,d)$ est aussi un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec

$$L_h(\Gamma(u,d))\leq\frac{L_h(\Gamma(u))}{1-c_hL_h(\Gamma(u))\rho_h(\Gamma(u),\Gamma(u,d))}\leq\frac{2}{1-2c_h\frac{d\pi}{2c_h}}\leq\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4.$$

□

Nous pouvons aussi donner une généralisation du *Lemme II.3.1* qui localise les points d'un ensemble d'échantillonnage.

Pour $u=(r_j)$, $C>0$, $j\in\mathbb{N}$, $\theta\in]-\pi,\pi]$, posons

$$Q_{u,C,j,\theta}=\{\ z\in\mathbb{D}:||z|-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)\ \text{ et }\ |\arg z-\theta|<C(r_{j+1}-r_j)\ \}.$$

Proposition II.3.2. *Soient h un poids et $\Gamma\subset\mathbb{D}$. Pour tout $u=(r_j)$ tel que*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1})\leq\frac{1}{2}\min\Big(A_h,\frac{1}{c_h}\Big)$$

et pour tout $C\leq 1/4$, si pour tous $j\in\mathbb{N}$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$, $\Gamma\cap Q_{u,C,j,\theta}\neq\emptyset$, alors Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $L_h(\Gamma)\leq 4$.

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_h(\Gamma(u),\Gamma) &\leq \sup_{j\in\mathbb{N},\theta\in]-\pi,\pi]} \sup_{re^{it}\in Q_{u,C,j,\theta}} \rho_h\big(r_j e^{i\theta}, re^{it}\big) \\
&\leq \sup_j \chi(r_j)^{-1} \sup_\theta \sup_{r:|r-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)} \sup_{t:|t-\theta|<C(r_{j+1}-r_j)} \big|re^{it} - r_j e^{i\theta}\big| \\
&\leq \sup_{j,\theta} \chi(r_j)^{-1} \sup_{r:|r-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)} \sup_{t:|t-\theta|<C(r_{j+1}-r_j)} \big|(r-r_j)e^{it} + r_j e^{i\theta}\big(e^{i(t-\theta)}-1\big)\big| \\
&\leq \sup_j \chi(r_j)^{-1} \sup_{r:|r-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)} |r-r_j| + \sup_j \chi(r_j)^{-1} \sup_{\theta,t:|t-\theta|<C(r_{j+1}-r_j)} \big|1-e^{i(t-\theta)}\big| \\
&\leq \sup_j \chi(r_j)^{-1} C(r_{j+1}-r_j) + \sup_j \chi(r_j)^{-1} C(r_{j+1}-r_j) \\
&\leq 2C \sup_{j\in\mathbb{N}} \rho_h(r_j, r_{j+1}) \ \leq C \min\Big(A_h, \frac{1}{c_h}\Big) \qquad \leq \frac{1}{4}\min\Big(A_h, \frac{1}{c_h}\Big).
\end{aligned}$$

Puisque la première partie de la preuve du *Lemme II.3.1* nous donne que $\Gamma(u)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $L_h(\Gamma(u)) \leq 2$, il en résulte que

$$\rho_h(\Gamma(u),\Gamma) < \delta_h(\Gamma(u)) = \min\Big(A_h, \frac{1}{c_h L_h(\Gamma(u))}\Big).$$

D'après la *Proposition II.2.9*, Γ est donc un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec

$$L_h(\Gamma) \leq \frac{L_h(\Gamma(u))}{1 - c_h L_h(\Gamma(u))\rho_h(\Gamma(u),\Gamma)} \leq \frac{2}{1-2c_h\frac{1}{4c_h}} = 4.$$

□

Le lemme suivant fournit une condition nécessaire en terme de densité pour qu'un ensemble de $\mathbb{D}$ soit d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme II.3.3. *Si $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous-ensemble Γ' ρ_h-séparé qui est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que*

$$\varliminf_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{z\in\Gamma':\frac{1}{2}<|z|<r} |\ln|z|| \geq 1 \ \ et \ \ \varliminf_{r\to 1-} \frac{\sum_{z\in\Gamma':\frac{1}{2}<|z|<r} |\ln|z||}{h(r) + (1-r)\mathrm{Card}\,(\Gamma'\cap r\mathbb{D})} \geq \frac{1}{2}.$$

DÉMONSTRATION. Adaptons notre preuve du *Théorème I.2.8.* D'après le *Corollaire II.2.12*, nous pouvons supposer que $\Gamma = \{z_k\}_k$ est ρ_h-séparé. Remarquons que pour $r < 1$, $\mathrm{Card}\,\big(\Gamma \cap r\mathbb{D}\big) < +\infty$. Nous posons $\widetilde{\Gamma} = \{w_k\}_k$ donné par $w_k = z_k$ si $z_k \neq 0$ et $w_k = \min\big(\delta_h(\Gamma), \inf\{|z_k|,\ z_k \in \Gamma\setminus\{0\}\}\big)/2$ si $z_k = 0$. Il est évident que $\rho_h(z_k, w_k) \leq \delta_h(\Gamma)/2$ et d'après le *Corollaire II.2.10*, $\widetilde{\Gamma}$ est aussi un ensemble d'échantillonnage. Nous considérons les produits finis de Blaschke modifiés par Seip **[20]**

$$f_r(z) = \prod_{w_k \in \widetilde{\Gamma} \cap r\mathbb{D}} \frac{\Phi_{w_k}(z)}{|w_k|}.$$

Nous avons d'une part $\|f_r\|_h \geq e^{-h(0)}$ et d'autre part

$$\sup_k |f_r(w_k)| e^{-h(w_k)} \leq e^{\sum_{|w_k|<r} |\ln |w_k|| - h(r)} \leq e^{2\sum_{|w_k|<r} |\ln |w_k|| - h(r) - (1-r)\mathrm{Card}\,(\tilde{\Gamma} \cap r\mathbb{D})}.$$

$\widetilde{\Gamma}$ étant d'échantillonnage, pour $r > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{\frac{1}{2}<|w_k|<r} |\ln |w_k|| \geq h(r) + \ln \frac{e^{-h(0)}}{L_h(\widetilde{\Gamma})} - \sum_{|w_k| \leq \frac{1}{2}} |\ln |w_k||$$

et

$$\sum_{\frac{1}{2}<|w_k|<r} |\ln |w_k|| \geq \frac{1}{2}\big(h(r) + (1-r)\mathrm{Card}\,(\Gamma \cap r\mathbb{D})\big) + \frac{1}{2} \ln \frac{e^{-h(0)}}{L_h(\widetilde{\Gamma})} - \sum_{|w_k| \leq \frac{1}{2}} |\ln |w_k||.$$

D'où

$$\varliminf_{r \to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{z \in \Gamma : \frac{1}{2}<|z|<r} |\ln |z|| = \varliminf_{r \to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{z \in \widetilde{\Gamma} : \frac{1}{2}<|z|<r} |\ln |z|| \geq 1$$

et

$$\varliminf_{r \to 1-} \frac{\sum_{z \in \Gamma : \frac{1}{2}<|z|<r} |\ln |z||}{h(r) + (1-r)\mathrm{Card}\,(\Gamma \cap r\mathbb{D})} = \varliminf_{r \to 1-} \frac{\sum_{z \in \widetilde{\Gamma} : \frac{1}{2}<|z|<r} |\ln |z||}{h(r) + (1-r)\mathrm{Card}\,(\Gamma \cap r\mathbb{D})} \geq \frac{1}{2}.$$

$\square$

La proposition suivante nous donne des exemples explicites d'ensembles d'échantillonnage et d'ensembles de non–échantillonnage, pour certains espaces $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Proposition II.3.4. *Soit* $h(r) = \dfrac{a}{(1-r^2)^\beta}$, $a, \beta > 0$, *et soit* $\Gamma(u,d)$ *tel que* $r_j = 1 - 1/(1+\delta j)^{\frac{2}{\beta}}$, $\delta > 0$.

(a) *Si* $\delta^{-1} \geq (1+1/\beta)2^{5+\beta}\big(1 + 8a\beta(1+\beta)^2 4^{2+\beta}\big)e^{a\beta(1+\beta)^2 4^{2+\beta}}$ *et* $d^{-1} \geq 2\pi$, *la suite* ρ_h–*séparée* $\Gamma(u,d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, *avec* $L_h(\Gamma(u,d)) \leq 4$.

(b) *Si* $\delta^2 d > a^{-1}2^{\beta-1}\beta \ln 2$, *la suite* ρ_h–*séparée* $\Gamma(u,d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Démonstration. Montrons d'abord que pour tous δ et d, $\Gamma(u,d)$ est ρ_h–séparé. D'une part,

$$\rho_h(\Gamma(u,d)) = \inf_{z\in\Gamma(u,d)} \inf_{w\in\Gamma(u,d), w\neq z, |w|\geq|z|} \chi(z)^{-1}|w-z| \geq \min\Big(\inf_{j\in\mathbb{N}} \chi(r_j)^{-1}\inf_{J>j}|r_J - r_j|,$$
$$\inf_{j\in\mathbb{N}^*}\chi(r_j)^{-1} \inf_{0\leq m\neq m'\leq[d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]} r_j\left|1-e^{i2\pi(m'-m)/([d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1)}\right|\Big)$$
$$\geq \min\Big(\inf_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1}), \inf_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{2\,r_j}{\chi(r_j)} \inf_{0<m\leq[d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]}\sin\Big(\frac{\pi m}{[d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)]+1}\Big)\Big)$$
$$\geq \min\Big(\inf_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1}), \inf_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{2r_0}{\chi(r_j)}\frac{2}{d^{-1}/(r_{j+1}-r_j)+1}\Big) \qquad \geq C\ \inf_{j\in\mathbb{N}}\rho_h(r_j,r_{j+1}),$$

où $C=\min\big(1, 4r_0\,d/(1+d)\big)>0$. D'autre part, puisque

$$\chi(r) = \frac{(1-r^2)^{1+\beta/2}}{2\sqrt{a\beta}\sqrt{1+\beta r^2}}$$

et d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\rho_h(r_j,r_{j+1}) \quad = 2\sqrt{a\beta}\sqrt{1+\beta r_j^2}\frac{r_{j+1}-r_j}{(1-r_j^2)^{1+\beta/2}}$$
$$\geq \frac{\sqrt{a\beta}}{2^{\beta/2}}(1+\delta j)^{2/\beta+1}\Big((1+\delta j)^{-2/\beta}-(1+\delta(j+1))^{-2/\beta}\Big) \quad \geq \sqrt{a/\beta}\,2^{1-\beta/2}\,\delta/(1+\delta)^{2/\beta+1}.$$

(a). On a $\rho_h(r_j,r_{j+1})\leq 4\sqrt{a/\beta}\sqrt{1+\beta}\,\delta$, et aussi

$$A_h = \sqrt{a\beta}\inf_{r\in[0,1[}\frac{1}{(1+r)^{1+\beta/2}}\frac{\sqrt{1+\beta r^2}}{(1-r)^{\beta/2}} \quad \in \Big[\frac{\sqrt{a\beta}}{2^{1+\beta/2}}, \sqrt{a\beta}\Big],$$

$$\begin{aligned} B_h &= \sup_{r\in[0,1[}\left(\frac{1-r^2}{1-(r+A_h\chi(r))^2}\right)^{1+\beta/2}\sqrt{\frac{1+\beta(r+A_h\chi(r))^2}{1+\beta r^2}} \\ &= \sup_{r\in[0,1[}\left(\frac{1}{1-\frac{A_h\chi(r)}{1-r}}\right)^{1+\beta/2}\left(\frac{1}{1+\frac{A_h\chi(r)}{1+r}}\right)^{1+\beta/2}\sqrt{\frac{1+\beta(r+A_h\chi(r))^2}{1+\beta r^2}} \\ &\leq \sup_{r\in[0,1[} 2^{1+\beta/2}1^{1+\beta/2}\sqrt{\frac{1+1\beta}{1+0\beta}} \qquad \leq \sqrt{1+\beta}2^{1+\beta/2}\end{aligned}$$

et

$$c_h \;=\; \frac{B_h}{A_h}\big(1+2A_h^2B_h^2(1+B_h)^2\big)e^{A_h^2B_h^2(1+B_h)^2/4}$$
$$\leq \sqrt{(1+\beta)/(a\beta)}2^{2+\beta}\big(1+2a\beta(1+\beta)2^{2+\beta}(1+\sqrt{1+\beta}2^{1+\beta/2})^2\big)e^{a\beta(1+\beta)2^\beta(1+\sqrt{1+\beta}2^{1+\beta/2})^2}$$
$$\leq \sqrt{(1+\beta)/(a\beta)}2^{2+\beta}\big(1+8a\beta(1+\beta)^2 4^{2+\beta}\big)e^{a\beta(1+\beta)^2 4^{2+\beta}}.$$

Il vient que si

$$\delta^{-1} \geq \frac{1+\beta}{\beta} 2^{5+\beta}\big(1+8a\beta(1+\beta)^2 4^{2+\beta}\big)e^{a\beta(1+\beta)^2 4^{2+\beta}},$$

alors

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \rho_h(r_j, r_{j+1}) \leq \frac{1}{2}\min\Big(A_h, \frac{1}{c_h}\Big).$$

Donc d'après le *Lemme II.3.1*, avec $d \leq (2\pi)^{-1}$, $\Gamma(u,d)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $L_h(\Gamma(u,d)) \leq 4$.

(b). On a

$$\begin{aligned}
\varliminf_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{z\in\Gamma(u,d):\frac{1}{2}<|z|<r} |\ln|z|| \quad &\leq \frac{2\ln 2}{a} \varliminf_{j\to+\infty} (1-r_{j+1}^2)^\beta \sum_{z\in\Gamma(u,d):\frac{1}{2}<|z|<r_{j+1}} (1-|z|) \\
&\leq \frac{2^{1+\beta}\ \ln 2}{a} \varliminf_{j\to+\infty} (1+\delta j)^{-2} \sum_{l\leq j}(1-r_l)\left(d^{-1}/(r_{l+1}-r_l)+1\right) \\
&\leq \frac{2^{\beta+1}\ \ln 2}{a\ d} \varliminf_{j\to+\infty} (1+\delta j)^{-2} \sum_{l\leq j}\Big(1+1/\Big(\Big(1+\frac{\delta}{1+\delta l}\Big)^{2/\beta}-1\Big)\Big) \\
&\leq \frac{2^{\beta+1}\ \ln 2}{a\ d} \varliminf_{j\to+\infty} (1+\delta j)^{-2} \sum_{l\leq j}\Big(\frac{\beta}{2}l+O(1)\Big) \;\leq \frac{2^{\beta-1}\beta\ln 2}{a\delta^2}\frac{1}{d} \qquad <1,
\end{aligned}$$

ce qui implique, d'après le *Lemme II.3.3*, que $\Gamma(u,d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. □

La proposition suivante est la réciproque de la *Proposition II.3.2* pour $h(r) = \dfrac{a}{(1-r)^\beta}$, $a, \beta > 0$. Nous donnons une condition nécessaire en terme de distribution uniforme pour qu'un ensemble de $\mathbb{D}$ soit un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Proposition II.3.5. *Si $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $h(r) = \dfrac{a}{(1-r)^\beta}$, $a, \beta > 0$, alors*

$$\forall\delta>0,\ \exists C>0,\ \exists J\geq 0\ /\ \forall j\geq J,\ \forall\theta\in]-\pi,\pi],\ \Gamma\cap Q_{u,C,j,\theta}\neq\emptyset,$$

où $u = u_\delta = (r_j)$ avec $r_j = 1-1/(1+\delta j)^{\frac{2}{\beta}}$.

Démonstration. Par contraposition supposons que

$$\exists\delta>0\ /\ \forall C>0,\ \forall J\geq 0,\ \exists j\geq J,\ \exists\theta\in]-\pi,\pi]:\Gamma\cap Q_{u,C,j,\theta}=\emptyset;$$

nous allons prouver que Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Nous pouvons supposer $\theta = 0$ par rotation. Considérons la fonction pic suivante

$$f_{C,J}(z) = z^{m_j} e^{n_j \frac{a}{(1-z)^\beta}}, \tag{II.3.1}$$

où $m_j = \left[a\beta(1+\delta j)^{2+2/\beta}/2\right]$ et $n_j = 1 - m_j(1-r_j)^{1+\beta}/(a\beta r_j) = 1/2 + O\big(j^{-2/\beta}\big)$, $j \to +\infty$ (alors $n_j > 0$ pour tout j assez grand).

Nous avons pour tout $r \in [0,1[$, pour tout $t \in]-\pi,\pi]$,

$$\left|f_{C,J}(re^{it})\right| = r^{m_j} e^{n_j \operatorname{Re} \frac{a}{(1-re^{it})^\beta}} \leq r^{m_j} e^{n_j \frac{a}{|1-re^{it}|^\beta}}$$

avec $|t| \mapsto r^{m_j} e^{n_j \frac{a}{|1-re^{it}|^\beta}} = r^{m_j} e^{a n_j \left((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{|t|}{2}\right)^{-\beta/2}}$ décroissant. Posons $v_j(r) = r^{m_j} e^{-\frac{a(1-n_j)}{(1-r)^\beta}}$ $\left(\text{alors } v_j'(r) = e^{-\frac{a(1-n_j)}{(1-r)^\beta}} r^{m_j-1}\left(m_j - (1-n_j)\dfrac{a\beta r}{(1-r)^{1+\beta}}\right)\right)$.

D'une part,

$$\begin{aligned}\left\|f_{C,J}\right\|_h &= \sup_{0\leq r<1}\sup_{-\pi<t\leq\pi}\left|f_{C,J}(re^{it})\right| e^{-\frac{a}{(1-r)^\beta}} = \sup_{0\leq r<1}\left|f_{C,J}(r)\right| e^{-\frac{a}{(1-r)^\beta}}\\ &= \sup_{0\leq r<1} v_j(r) = v_j(r_j) \quad < +\infty.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left\|f_{C,J}|_{\mathbb{D}\setminus Q_{u,C,j,\theta}}\right\|_h = \max(A,B),$$

où

$$A = \sup_{|r-r_j|\geq C(r_{j+1}-r_j)} \sup_t |f_{C,J}(re^{it})| e^{-\frac{a}{(1-r)^\beta}} \leq v_j\big(r_j \pm C(r_{j+1}-r_j)\big)$$

et

$$\begin{aligned} B &= \sup_{|r-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)} \sup_{|t|\geq C(r_{j+1}-r_j)} |f_{C,J}(re^{it})| e^{-\frac{a}{(1-r)^\beta}}\\ &\leq \sup_{|r-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)} r^{m_j} e^{n_j \frac{a}{|1-re^{iC(r_{j+1}-r_j)}|^\beta}} e^{-\frac{a}{(1-r)^\beta}}\\ &\leq \sup_{|r-r_j|<C(r_{j+1}-r_j)} v_j(r) e^{-n_j \frac{a}{(1-r)^\beta}\left(1-\left(\frac{|1-re^{iC(r_{j+1}-r_j)}|}{1-r}\right)^{-\beta}\right)}\\ &\leq v_j(r_j) e^{\frac{-a n_j}{(1-r)^\beta}\left(1-\left(1+\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{C(r_{j+1}-r_j)}{2}\right)^{-\beta/2}\right)}\Big|_{r=r_j-C(r_{j+1}-r_j)}.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{\left\|f_{C,J}\right\|_h}{\left\|f_{C,J}|_\Gamma\right\|_h} &\geq \frac{\left\|f_{C,J}\right\|_h}{\left\|f_{C,J}|_{\mathbb{D}\setminus Q_{u,C,j,\theta}}\right\|_h}\\ &\geq \min\left(\frac{v_j(r_j)}{v_j\big(r_j \pm C(r_{j+1}-r_j)\big)}, e^{\frac{a n_j}{(1-r)^\beta}\left(1-\left(1+\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{C(r_{j+1}-r_j)}{2}\right)^{-\beta/2}\right)}\Big|_{r=r_j-C(r_{j+1}-r_j)}\right).\end{aligned}$$

Pour $j \to +\infty$, puisque $\dfrac{1}{r_j} - 1 = (\delta j)^{-2/\beta}(1+o(1))$ et

$$X = \pm C\frac{r_{j+1}-r_j}{1-r_j} = \pm C\big(1-(1+1/(j+1/\delta))^{-2/\beta}\big) = \pm\frac{2C}{\beta}\frac{1}{j}(1+o(1)),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\ln\frac{v_j(r_j)}{v_j(r_j\pm C(r_{j+1}-r_j))} &= m_j\Big(\Big(\frac{1}{r_j}-1\Big)\frac{(1-X)^{-\beta}-1}{\beta} - \ln\Big(1+\Big(\frac{1}{r_j}-1\Big)X\Big)\Big)\\
&= m_j\Big(\Big(\frac{1}{r_j}-1\Big)X\Big(1+\frac{\beta+1}{2}X+O(j^{-2})\Big) - \Big(\frac{1}{r_j}-1\Big)X\Big(1+O\big(j^{-1-2/\beta}\big)\Big)\Big)\\
&= m_j\Big(\frac{1}{r_j}-1\Big)X\Big(\frac{\beta+1}{2}X+O(j^{-2})+O\big(j^{-1-2/\beta}\big)\Big)\\
&= m_j\Big(\frac{1}{r_j}-1\Big)X^2\frac{\beta+1}{2}(1+o(1))\\
&= \frac{a\beta}{2}(\delta j)^{2+2/\beta}(1+o(1))(\delta j)^{-2/\beta}(1+o(1))\frac{4C^2}{\beta^2}\frac{1}{j^2}(1+o(1))\frac{\beta+1}{2}(1+o(1))\\
&= C^2\delta^2 a\frac{\beta+1}{\beta}(1+o(1)),
\end{aligned}$$

et pour $r = r_j - C(r_{j+1}-r_j)$, puisque $\dfrac{1-r}{1-r_j} = 1+|X| = 1+o(1)$ et

$$Y = \frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{C(r_{j+1}-r_j)}{2} = 4(1+o(1))\frac{C^2}{4}\Big(\frac{r_{j+1}-r_j}{1-r}\Big)^2(1+o(1)) = X^2(1+o(1)),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{an_j}{(1-r)^\beta}\Big(1-\Big(1+\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{C(r_{j+1}-r_j)}{2}\Big)^{-\beta/2}\Big) &= \frac{an_j}{(1-r)^\beta}\big(1-(1+Y)^{-\beta/2}\big)\\
&= \frac{a}{2}(1+o(1))(\delta j)^2(1+o(1))\frac{\beta}{2}X^2(1+o(1))(1+o(1))\\
&= C^2\delta^2\frac{a}{\beta}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\varliminf_{J\to+\infty}\frac{\|f_{C,J}\|_h}{\|f_{C,J}|\Gamma\|_h} \geq \min\Big(e^{C^2\delta^2 a\frac{\beta+1}{\beta}}, e^{C^2\delta^2\frac{a}{\beta}}\Big),$$

puis

$$\lim_{C\to+\infty}\varliminf_{J\to+\infty}\frac{\|f_{C,J}\|_h}{\|f_{C,J}|\Gamma\|_h} = +\infty.$$

Donc Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. □

Remarque II.3.6. 1. Sous les hypothèses de la *Proposition II.3.5*, on a $D_\chi^-(\Gamma) > 0$.

2. On peut démontrer la *Proposition II.3.5* en utilisant la fonction pic de [**4**] à la place de la fonction pic (II.3.1).

II.4. Majoration de la densité d'un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

Dans cette section nous allons donner une majoration de la χ–densité inférieure uniforme d'un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Ce résultat nous aidera à montrer au *Chapitre III* la suffisance de la condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ en terme de χ–densité inférieure uniforme.

Nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme II.4.1. *Soient A, A' avec $A > A' > 0$; il existe $0 < \mu < 1$ tel que pour tout $\mu \leq r_2 < 1$, si $r_2 \leq |w| < r - A\chi(r)$, alors $|w| + A'\chi(w) < r$.*

Démonstration. Par l'absurde, si $r \leq |w| + A'\chi(w)$, alors d'après le *Lemme II.2.5*, $|w| \geq r - A'\chi(r)\chi(w)/\chi(|w| + A'\chi(w)) \geq r - A\chi(r), \quad r_2 \to 1-$. □

Lemme II.4.2. *Soient $\varepsilon > 0$ et $R > 0$. Pour*

$$A = R(1+\varepsilon)/\big(1 - (1+\varepsilon)^{-1/8}\big) > R,$$

il existe $0 < \mu < 1$ tel que pour tout $\mu \leq r_2 < 1$, si r, w, z vérifient

$$r_2 \leq |w| < r - A\chi(r) \quad et \quad z \in \mathbb{D}(w, R\chi(w)),$$

alors

(a) $r_2 + A\chi(r_2) < 1$;

(b) $z \in r\mathbb{D} \setminus (r_2 - R\chi(r_2))\mathbb{D} \subset r\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

(c) $w \in \mathbb{D}\big(z, R(1+\varepsilon)^{1/8}\chi(z)\big)$;

(d) $1/\chi(w) \leq (1+\varepsilon)^{1/8}/\chi(z)$;

(e) $\ln \dfrac{r}{|w|} \leq (1+\varepsilon)^{1/4} \ln \dfrac{r}{|z|}$.

Démonstration. (a). D'après le *Lemme II.2.1*, on a

$$r_2 + A\chi(r_2) < 1, \quad r_2 \to 1-.$$

(b). D'une part d'après le *Lemme II.4.1* appliqué pour $A' = R$,

$$|z| \leq |w| + |z - w| < |w| + R\chi(w) < r, \quad r_2 \to 1-;$$

d'autre part puisque $\lim_{r_2\to 1-} r_2/\chi(r_2) = \lim_{r_2\to 1-} 1/\chi(r_2) = +\infty$,

$$|z| \geq |w| - |z-w| > |w| - R\chi(w) \geq r_2 - R\chi(r_2) > 0, \quad r_2 \to 1- .$$

(c). D'après le *Lemme II.2.5*, on a

$$|w-z| < R\chi(w) \leq R\chi(z)\chi(w)/\chi(|w| + R\chi(w)) < R(1+\varepsilon)^{1/8}\chi(z), \quad r_2 \to 1- .$$

(d). D'après le *point (c)*, $1/\chi(w) \leq 1/\chi\big(|z| + R(1+\varepsilon)^{1/8}\chi(z)\big), \quad r_2 \to 1-$; d'après le *point (b)*, si $r_2 \to 1-$ alors $|z| \to 1-$; d'où d'après le *Lemme II.2.5*,

$$1/\chi(w) \leq (1+\varepsilon)^{1/8}/\chi(z), \quad r_2 \to 1- .$$

(e). D'une part d'après le *Lemme II.4.1* appliqué pour $A' = A/(1+\varepsilon)$ et en utilisant le développement limité d'ordre un de la fonction logarithme, on a

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+|z-w|/|w|)}{\ln(1+(r-|w|)/|w|)} \;&\leq\; \frac{\ln(1+R\chi(w)/|w|)}{\ln(1+A/(1+\varepsilon)\chi(w)/|w|)} \leq \frac{R\chi(w)/|w|}{A/(1+\varepsilon)\chi(w)/|w|}(1+o(1))\\ &\leq\; (1-(1+\varepsilon)^{-1/8})(1+o(1)) \quad \leq 1-(1+\varepsilon)^{-1/4}, \quad r_2 \to 1- .\end{aligned}$$

D'autre part d'après le *point (b)*, on a $|z| < r, \quad r_2 \to 1-$.
Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{\ln \frac{r}{|w|}}{\ln \frac{r}{|z|}} = \left(1 - \ln\frac{|z|}{|w|}/\ln\frac{r}{|w|}\right)^{-1} \;&\leq\; \left(1 - \frac{\ln(1+|z-w|/|w|)}{\ln(1+(r-|w|)/|w|)}\right)^{-1}\\ &\leq\; \big(1-\big(1-(1+\varepsilon)^{-1/4}\big)\big)^{-1} \quad \leq (1+\varepsilon)^{1/4}, \quad r_2 \to 1- .\end{aligned}$$

□

Proposition II.4.3. *Si Γ est un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors*

$$D^-_\chi(\Gamma) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})\setminus\{0\}$ d'ensemble de zéros Γ. On supposera que $f(0) \neq 0$. D'après la formule de Jensen,

$$-\infty < \ln|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta - \sum_{k:a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln\frac{r}{|a_k|}, \qquad 0 < r < 1.$$

Donc

$$\varlimsup_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{k:a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln\frac{r}{|a_k|} \le 1. \tag{II.4.1}$$

Montrons d'abord par l'absurde que $D_\chi^-(\Gamma) < +\infty$. On suppose que $D_\chi^-(\Gamma) = +\infty$. Alors pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ et $0 < r_1 < 1$ tels que pour tout $r_1 \le |w| < 1$,

$$\operatorname{Card}\big(\Gamma \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))\big) \ge M\pi R^2.$$

Prenons $\varepsilon = 1/2$. D'après le *Lemme II.4.2* appliqué pour $r_2 = \max(\mu, r_1)$, on peut trouver $A > R$ et $r_1 \le r_2 < 1$ tels que si $r_2 \le |w| < r - A\chi(r)$ et $z \in \mathbb{D}(w, R\chi(w))$, alors

$$\begin{gathered} r_2 + A\chi(r_2) < 1,\ z \in r\mathbb{D}\setminus\{0\},\ w \in \mathbb{D}\big(z, R(1+\varepsilon)^{1/8}\chi(z)\big), \\ 1/\chi(w) \le (1+\varepsilon)^{1/8}/\chi(z) \quad \text{et} \quad \ln\frac{r}{|w|} \le (1+\varepsilon)^{1/4}\ln\frac{r}{|z|}. \end{gathered}$$

Pour tout $r_2 + A\chi(r_2) < r < 1$, nous avons $r - A\chi(r) > r_2$ et d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \sum_{k:a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln\frac{r}{|a_k|} &= \sum_{k:a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \frac{1}{\pi(1+\varepsilon)^{1/4}R^2\chi(a_k)^2} \int_{\mathbb{D}\left(a_k,(1+\varepsilon)^{1/8}R\chi(a_k)\right)} dm_2(w)\ \ln\frac{r}{|a_k|} \\ &\ge \int_{(r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/4}\pi R^2} \sum_{k:a_k\in\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} \chi(a_k)^{-2}\ln\frac{r}{|a_k|}\, dm_2(w) \\ &\ge \int_{(r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}} \frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))\big)}{\pi(1+\varepsilon)^{3/4}\ R^2}\chi(w)^{-2}\ln\frac{r}{|w|}\, dm_2(w) \\ &\ge \frac{M}{(1+\varepsilon)^{3/4}} \int_{(r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}} \chi(w)^{-2}\ln\frac{r}{|w|}\, dm_2(w) = \frac{M}{(1+\varepsilon)^{3/4}} I\big((r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}\big), \end{aligned}$$

où $I(\Omega) = \int_\Omega \chi(w)^{-2}\ln\frac{r}{|w|}\, dm_2(w)$, $\Omega \subset \mathbb{D}$. Puisque

$$I\big((r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}\big) = I\big(r\mathbb{D}\big) - I\big(r\mathbb{D}\setminus(r-A\chi(r))\mathbb{D}\big) - I\big(r_2\mathbb{D}\big),$$

avec d'après la formule de Green,

$$I\big(r\mathbb{D}\big) = \int_{r\mathbb{D}} \Delta h(w)\ln\frac{r}{|w|}\, dm_2(w) = 2\pi(h(r) - h(0))$$

et

$$I\big(r\mathbb{D}\setminus(r-A\chi(r))\mathbb{D}\big) \le 2\pi A\frac{r}{\chi(r)}\ln\frac{1}{1-A\chi(r)/r} = 2\pi A^2 + o(1), \quad r\to 1-,$$

il en résulte

$$\sum_{k:a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln\frac{r}{|a_k|} \ge 2\pi(1+\varepsilon)^{-3/4}M\,h(r) + C, \quad r\to 1-,$$

et faisant tendre r vers $1-$,

$$\varliminf_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{k: a_k \in \Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln \frac{r}{|a_k|} \geq 2\pi (1+\varepsilon)^{-3/4} M.$$

Faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient

$$\varliminf_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{k: a_k \in \Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln \frac{r}{|a_k|} = +\infty,$$

ce qui contredit l'*inégalité* (II.4.1), et donc

$$D_\chi^-(\Gamma) < +\infty.$$

Maintenant, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $R > 0$ tel que

$$\varliminf_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \operatorname{Card}\big(\Gamma \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))\big) \geq D_\chi^-(\Gamma)(1-\varepsilon/2)\pi R^2,$$

donc il existe $0 < r_1 < 1$ tel que pour tout $r_1 \leq |w| < 1$,

$$\operatorname{Card}\big(\Gamma \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))\big) \geq D_\chi^-(\Gamma)(1-\varepsilon)\pi R^2.$$

D'après le *Lemme II.4.2* appliqué pour $r_2 = \max(\mu, r_1)$, on peut trouver $A > R$ et $r_1 \leq r_2 < 1$ tels que si $r_2 \leq |w| < r - A\chi(r)$ et $z \in \mathbb{D}(w, R\chi(w))$, alors

$$\begin{gathered} r_2 + A\chi(r_2) < 1,\ z \in r\mathbb{D}\setminus\{0\},\ w \in \mathbb{D}\big(z, R(1+\varepsilon)^{1/8}\chi(z)\big), \\ 1/\chi(w) \leq (1+\varepsilon)^{1/8}/\chi(z) \quad \text{et} \quad \ln\frac{r}{|w|} \leq (1+\varepsilon)^{1/4} \ln \frac{r}{|z|}. \end{gathered}$$

Pour tout $r_2 + A\chi(r_2) < r < 1$, nous avons $r - A\chi(r) > r_2$ et

$$\begin{aligned} \sum_{k: a_k \in \Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln \frac{r}{|a_k|} \quad &\geq \int_{(r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/4}\pi R^2} \sum_{k: a_k\in\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} \chi(a_k)^{-2} \ln\frac{r}{|a_k|}\, dm_2(w) \\ \geq \int_{(r-A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}} &\frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))\big)}{\pi(1+\varepsilon)^{3/4}\ R^2} \chi(w)^{-2} \ln\frac{r}{|w|}\, dm_2(w) \quad \geq \frac{(1-\varepsilon)D_\chi^-(\Gamma)}{(1+\varepsilon)^{3/4}} I_r, \end{aligned}$$

où $I_r = I\big((r - A\chi(r))\mathbb{D}\setminus r_2\mathbb{D}\big)$. Comme précédemment, il en résulte

$$\sum_{k: a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln\frac{r}{|a_k|} \geq 2\pi D_\chi^-(\Gamma) \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{3/4}} h(r) + C(\varepsilon), \quad r \to 1-,$$

et faisant tendre r vers $1-$,

$$\varliminf_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{k: a_k \in \Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln \frac{r}{|a_k|} \geq 2\pi D_\chi^-(\Gamma) \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{3/4}}.$$

Faisant tendre ε vers $0+$, on obtient

$$D_\chi^-(\Gamma) \leq \frac{1}{2\pi} \varliminf_{r\to 1-} \frac{1}{h(r)} \sum_{k:a_k\in\Gamma\cap r\mathbb{D}} \ln \frac{r}{|a_k|}. \tag{II.4.2}$$

En combinant les *inégalités* (II.4.1) *et* (II.4.2), on conclut

$$D_\chi^-(\Gamma) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

□

II.5. Construction d'un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ de densité maximale

Le résultat principal de cette section est le Théorème II.1.1. La preuve de ce théorème nécessite les lemmes ci–dessous.

Lemme II.5.1. *Il existe des suites $\{r_k\}$ et $\{s_k\}$ avec $0 = r_0 < s_0 < r_1 < ... < r_k < s_k < r_{k+1} < ... < 1$, et une suite (N_k) avec $N_k \in \mathbb{N}^*$, telles que*

(a) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{r_{k+1}-r_k}{\chi(r_k)} = \sqrt{2\pi}$,

(b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} N_k(r_{k+1}-r_k) = 2\pi$,

(c) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{r_{k+1}-r_k}{r_k-r_{k-1}} = 1$,

(d) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{r_{k+1}-s_k}{r_{k+1}-r_k} = \frac{1}{2}$.

Démonstration. Nous construisons d'abord les suites $\{r_k\}$ et (N_k) de façon itérative : $r_0 = 0$; r_k étant donné, nous notons r_k^* le nombre défini par

$$(r_k^* - r_k)\int_{r_k\leq|w|<r_k^*} \Delta h(w)\,\frac{dm_2(w)}{2\pi} = 2\pi,$$

puis nous définissons N_k comme le plus petit entier plus grand que $\dfrac{2\pi}{r_k^*-r_k}$, et nous définissons aussi $r_{k+1} \geq r_k^*$ par

$$\int_{r_k\leq|w|<r_{k+1}} \Delta h(w)\,\frac{dm_2(w)}{2\pi} = N_k.$$

D'une part on a

$$N_k(r_{k+1}-r_k) \geq 2\pi\frac{r_{k+1}-r_k}{r_k^*-r_k} \geq 2\pi.$$

D'autre part, puisque $\Delta h(r)$ croît vers $+\infty$, les relations

$$\frac{2\pi}{r_k^*-r_k} = \int_{r_k\leq|w|<r_k^*} \Delta h(w)\,\frac{dm_2(w)}{2\pi} \leq \Delta h(r_k^*)\frac{r_k^{*2}-r_k^2}{2}$$

et

$$\Delta h(r_k^*)\frac{r_{k+1}^2-r_k^{*2}}{2}\le\int_{r_k^*\le|w|<r_{k+1}}\Delta h(w)\,\frac{dm_2(w)}{2\pi}<1$$

impliquent $\lim_{k\to+\infty} r_k^*=1-$ par l'absurde et

$$\frac{r_{k+1}-r_k^*}{r_k^*-r_k}\le\frac{\sqrt{r_k^*+r_k}}{\sqrt{\pi}(r_{k+1}+r_k^*)\sqrt{\Delta h(r_k^*)}}=o(1),\quad k\to+\infty;$$

d'où

$$\begin{aligned}N_k(r_{k+1}-r_k)&\le\Big(\frac{2\pi}{r_k^*-r_k}+1\Big)(r_{k+1}-r_k)\\&\le 2\pi+r_{k+1}-r_k+2\pi\frac{r_{k+1}-r_k^*}{r_k^*-r_k}\quad=2\pi+o(1),\quad k\to+\infty.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\lim_{k\to+\infty}N_k(r_{k+1}-r_k)=2\pi.$$

Puisque

$$\Delta h(r_k)\frac{r_{k+1}^2-r_k^2}{2}\le N_k\le\Delta h(r_{k+1})\frac{r_{k+1}^2-r_k^2}{2},$$

on en déduit

$$\frac{2}{r_k+r_{k+1}}N_k(r_{k+1}-r_k)\Big(\frac{\chi(r_{k+1})}{\chi(r_k)}\Big)^2\le\Big(\frac{r_{k+1}-r_k}{\chi(r_k)}\Big)^2\le\frac{2}{r_k+r_{k+1}}N_k(r_{k+1}-r_k),$$

d'où $\rho_h(r_k,r_{k+1})\le K<+\infty$, ce qui implique d'après le *Lemme* (II.2.5),

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\chi(r_{k+1})}{\chi(r_k)}=1.$$

Il en résulte

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(\frac{r_{k+1}-r_k}{\chi(r_k)}\Big)^2=2\pi.$$

De plus, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{r_{k+1}-r_k}{r_k-r_{k-1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(r_{k+1}-r_k)/\chi(r_k)}{(r_k-r_{k-1})/\chi(r_{k-1})}\frac{\chi(r_k)}{\chi(r_{k-1})}=1.$$

Ensuite nous définissons la suite $\{s_k\}$ par les relations

$$\ln\frac{1}{s_k}=\frac{1}{N_k}\int_{r_k\le|w|<r_{k+1}}\Delta h(w)\ln\frac{1}{|w|}\,\frac{dm_2(w)}{2\pi},\qquad k\in\mathbb{N}.\tag{II.5.1}$$

Clairement,

$$\ln\frac{1}{r_{k+1}}<\ln\frac{1}{s_k}<\ln\frac{1}{r_k},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\frac{r_{k+1}-s_k}{r_{k+1}-r_k} &= \lim_{k\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{s_k}-\ln\frac{1}{r_{k+1}}}{r_{k+1}-r_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\int_{r_k\le|w|<r_{k+1}}\Delta h(w)\ln\frac{r_{k+1}}{|w|}\frac{dm_2(w)}{2\pi}}{N_k(r_{k+1}-r_k)}\\ &= \lim_{k\to+\infty}\frac{\int_{r_k}^{r_{k+1}}x\ln\frac{r_{k+1}}{x}\,dx}{(r_{k+1}-r_k)^2} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(r_{k+1}-r_k)^2}\int_{r_k}^{r_{k+1}}(r_{k+1}-x)\,dx \quad = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Lemme II.5.2. *Avec les suites $\{r_k\}$, $\{s_k\}$ et (N_k) du Lemme II.5.1, on pose $\lambda_{k,m} = s_k e^{i2\pi m/N_k}$, et on définit, pour $z\in\mathbb{D}$, $j\in\mathbb{N}$ par $r_j\le|z|<r_{j+1}$, puis $m_z\in\mathbb{N}$, $m_z<N_j$, par $-\pi/N_j\le\arg z-2\pi m_z/N_j<\pi/N_j$. L'ensemble $\Lambda=\{\lambda_{k,m}\}_{k\ge0,0\le m<N_k}$ est tel que*

(e) Λ *est ρ_h–separé,* $\sup_{z\in\mathbb{D}}\rho_h(z,\Lambda)<+\infty$ *et*

$$\rho_h(z,\Lambda)\asymp\frac{\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda|}{\chi(z)}\asymp N_j|1-z/\lambda_{j,m_z}|\,; \tag{II.5.2}$$

(f) $D^-_\chi(\Lambda)=D^+_\chi(\Lambda)=1/(2\pi)$.

Démonstration. (e). Montrons d'abord que Λ est ρ_h–séparé. Soient $\lambda_{k_1,m_1},\lambda_{k_2,m_2}\in\Lambda$ tels que $\lambda_{k_1,m_1}\ne\lambda_{k_2,m_2}$ et $k_2\ge k_1$. On distingue deux cas :

si $k_2>k_1$, alors

$$|\lambda_{k_2,m_2}-\lambda_{k_1,m_1}|\ge s_{k_2}-s_{k_1}\ge s_{k_1+1}-s_{k_1}>0;$$

si $k_2=k_1$, alors $m_2\ne m_1$, $N_{k_1}\ge2$ et

$$\begin{aligned}|\lambda_{k_2,m_2}-\lambda_{k_1,m_1}| &= s_{k_1}\left|e^{i2\pi m_2/N_{k_1}}-e^{i2\pi m_1/N_{k_1}}\right| = 2s_{k_1}\sin(\pi|m_2-m_1|/N_{k_1})\\ &\ge 2s_{k_1}\sin(\pi/N_{k_1})>0.\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{k\to\infty}(s_{k+1}-s_k)/\chi(s_k)=\sqrt{2\pi}$ et $\lim\limits_{k\to\infty}(2s_k\sin(\pi/N_k))/\chi(s_k)=\sqrt{2\pi}$,

$$\begin{aligned}\rho_h(\Lambda) &= \inf\left\{|\lambda_{k_2,m_2}-\lambda_{k_1,m_1}|/\chi(\min(s_{k_1},s_{k_2}))\ :\ \lambda_{k_1,m_1},\lambda_{k_2,m_2}\in\Lambda\ ,\ \lambda_{k_1,m_1}\ne\lambda_{k_2,m_2}\right\}\\ &\ge \min\left(\inf_k(s_{k+1}-s_k)/\chi(s_k),\inf_k 2s_k\sin(\pi/N_k)/\chi(s_k)\right)\ >0.\end{aligned}$$

Soit maintenant $z\in\mathbb{D}$. D'une part

$$\begin{aligned}|z-\lambda_{j,m_z}|^2 &= (r-s_j)^2+4rs_j\sin^2(|\arg z-2\pi m_z/N_j|/2)\\ &\le \max(r_{j+1}-s_j,s_j-r_j)^2+4\sin^2(\pi/(2N_j))\\ &\le (r_{j+1}-r_j)^2+\left(\pi/(\inf_k N_k(r_{k+1}-r_k))\right)^2(r_{j+1}-r_j)^2 \quad\le c_2^2(r_{j+1}-r_j)^2\end{aligned}$$

et d'autre part si $k \neq j$,

$$\begin{aligned}
|z-\lambda_{k,m}| &\geq |r-s_k| \geq \min(r_j - s_{j-1}, s_{j+1} - r_{j+1}) \\
&\geq \min\Big(\inf_k \frac{r_k - s_{k-1}}{r_{k+1}-r_k}, \inf_k \frac{s_{k+1}-r_{k+1}}{r_{k+1}-r_k}\Big)(r_{j+1}-r_j) \quad \geq c_3(r_{j+1}-r_j)
\end{aligned}$$

ou si $k = j$ et $m \neq m_z$, si $r \leq s_0/2$,

$$|z-\lambda_{k,m}| \geq |r-s_j| \geq s_0/2 \geq c_3(r_{j+1}-r_j)$$

ou si $r > s_0/2$,

$$\begin{aligned}
|z-\lambda_{k,m}| &\geq 2\sqrt{rs_j}\sin\frac{|\arg z - 2\pi m/N_j|}{2} \geq \sqrt{2}s_0 \sin\frac{\pi}{2N_j} \\
&\geq \frac{\sqrt{2}s_0}{\sup_k N_k(r_{k+1}-r_k)}(r_{j+1}-r_j) \quad \geq c_3(r_{j+1}-r_j).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda| \asymp |z-\lambda_{j,m_z}| \asymp |1-z/\lambda_{j,m_z}|$$

et aussi

$$\frac{\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda|}{\chi(z)} \leq \frac{|z-\lambda_{j,m_z}|}{\chi(r_{j+1})} \leq c_2 \sup_k \frac{r_{k+1}-r_k}{\chi(r_{k+1})} = c_4.$$

Donc

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \rho_h(z,\Lambda) \leq c_4 < +\infty$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\rho_h(z,\Lambda) &= \min\Big(\inf_{k<j,m}\frac{|z-\lambda_{k,m}|}{\chi(s_k)}, \inf_{k\geq j,m}\frac{|z-\lambda_{k,m}|}{\chi(\min(|z|,s_k))}\Big) \\
&\geq \min\Big(\inf_{k<j}\frac{r_j-s_k}{\chi(s_k)}, \frac{\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda|}{\chi(r_j)}\Big) \\
&\geq \min\Big(\inf_k \frac{r_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)}, \inf_k\frac{\chi(r_{k+1})}{\chi(r_k)}\frac{\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda|}{\chi(z)}\Big) \\
&\geq c_5\frac{\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda|}{\chi(z)},
\end{aligned}$$

où $c_5 = \min\Big(\frac{1}{c_4}\inf_k\frac{r_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)}, \inf_k\frac{\chi(r_{k+1})}{\chi(r_k)}\Big)$, puis

$$\rho_h(z,\Lambda) \asymp \frac{\inf_{\lambda\in\Lambda}|z-\lambda|}{\chi(z)} \asymp N_j|1-z/\lambda_{j,m_z}|.$$

(f). Soient $\varepsilon > 0$ et $R > 0$. On a besoin des carrés suivants

$$Q(\lambda_{k,m}) = \big\{z\in\mathbb{D} : r_k \leq |z| < r_{k+1},\ -\pi/N_k \leq \arg z - 2\pi m/N_k < \pi/N_k\big\}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} m_2(Q(\lambda_{k,m})) &= \pi(r_{k+1}^2 - r_k^2)/N_k = (r_k + r_{k+1})\pi\frac{((r_{k+1}-r_k)/\chi(r_k))^2}{N_k(r_{k+1}-r_k)}\chi(r_k)^2 \\ &= 2\pi\chi(r_k)^2(1+o(1)), \quad k \to +\infty, \end{aligned}$$

il existe K tel que pour tout $k \geq K$, pour tout m,

$$m_2(Q(\lambda_{k,m})) \geq 2\pi\chi(r_k)^2/(1+\varepsilon).$$

Donc, pour $k_1 \geq K$ tel que $t_1 = r_{k_1} + R\chi(r_{k_1}) < 1$,

$$m_2(Q(\lambda_{k,m})) \geq 2\pi\chi(r_k)^2/(1+\varepsilon), \qquad t_1 \leq |w| < 1, \ \lambda_{k,m} \in \Lambda \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w)).$$

On pose

$$\beta = \Big(\max\Big(\sup_k \frac{r_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)}, \sup_k \frac{s_k - r_k}{\chi(s_k)}\Big) + \frac{\pi}{\inf_k N_k\chi(s_k)}\Big) \sup_w \frac{\chi(|w| - R\chi(w))}{\chi(w)}.$$

Pour $w \in \mathbb{D}$ et $\lambda_{k,m} \in \Lambda \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))$, puisque

$$|z - \lambda_{k,m}| \leq \max(r_{k+1} - s_k, s_k - r_k) + \pi/N_k \leq \beta\chi(w), \qquad z \in Q(\lambda_{k,m}),$$

on a

$$Q(\lambda_{k,m}) \subset \overline{\mathbb{D}}(\lambda_{k,m}, \beta\chi(w)) \ \text{ et } \ \bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} Q(\lambda) \subset \mathbb{D}(w, (R+\beta)\chi(w)).$$

De plus, il existe $0 < t_2 < 1$ tel que

$$\chi(w) \leq (1+\varepsilon)^{1/2}\chi(z), \qquad t_2 \leq |w| < 1, \ z \in \mathbb{D}(w, (R+\beta)\chi(w)).$$

Par conséquent, pour tout w vérifiant $\max(t_1, t_2) \leq |w| < 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\big(\Lambda \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))\big) &= \sum_{\lambda_{k,m}\in\Lambda\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} \frac{1}{m_2(Q(\lambda_{k,m}))}\int_{Q(\lambda_{k,m})} dm_2(z) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \sum_{\lambda_{k,m}\in\Lambda\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} \int_{Q(\lambda_{k,m})} \chi(r_k)^{-2}\, dm_2(z) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \sum_{\lambda_{k,m}\in\Lambda\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} \int_{Q(\lambda_{k,m})} \chi(z)^{-2}\, dm_2(z) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi}\int_{\cup_{\lambda\in\Lambda\cap\mathbb{D}(w,R\chi(w))} Q(\lambda)} \chi(z)^{-2}\, dm_2(z) \quad \leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi}\int_{\mathbb{D}(w,(R+\beta)\chi(w))} \chi(z)^{-2}\, dm_2(z) \\ &\leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{2\pi}\chi(w)^{-2} m_2\big(\mathbb{D}(w, (R+\beta)\chi(w))\big) \qquad \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{2}(R+\beta)^2. \end{aligned}$$

Faisant tendre $|w|$ vers $1-$, R vers $+\infty$ puis ε vers $0+$, on obtient

$$D^+_\chi(\Lambda) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, on a besoin des carrés suivants

$$Q(z,R) = \{w \in \mathbb{D} : ||w| - |z|| < R \text{ et } |\arg w - \arg z| < R\}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, R > 0.$$

Posons $\alpha = \sqrt{\pi/2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $m_2(Q(z,R)) = 4|z|R^2$ quand $R \leq \pi$, il existe $0 < r_1 < 1$ tel que pour tout $r_1 \leq |\lambda| < 1$,

$$m_2\big(Q\big(\lambda, (1+\varepsilon)^2\alpha\chi(\lambda)\big)\big) \leq (1+\varepsilon)^4 2\pi\chi(\lambda)^2.$$

Puisque $Q(z,R) \subset \mathbb{D}(z,2R)$, il existe $0 < r_2 < 1$ tel que pour tout $r_2 \leq |\lambda| < 1$, pour tout $z \in Q\big(\lambda, (1+\varepsilon)^2\alpha\chi(\lambda)\big)$,

$$\chi(\lambda) \leq (1+\varepsilon)^{1/2}\chi(z).$$

De plus, pour tous j et z vérifiant $s_j \leq |z| < s_{j+1}$, prenons $k = j$ si $|z| \in [s_j, (s_j + s_{j+1})/2]$, $k = j+1$ sinon, et $0 \leq m < N_k$ tel que

$$-\pi/N_k < \arg z - 2\pi m/N_k \leq \pi/N_k.$$

Pour tout j assez grand, puisque

$$|s_k - |z|| \leq (s_{j+1} - s_j)/2 < (1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}\chi(s_{j+1})/2 \leq (1+\varepsilon)\alpha\chi(z)$$

et

$$\pi/N_k = \frac{\pi}{N_k(r_{k+1} - r_k)} \frac{r_{k+1} - r_k}{\chi(r_k)} \frac{\chi(r_k)}{\chi(s_{j+1})}\chi(s_{j+1}) < (1+\varepsilon)\alpha\chi(z),$$

$\lambda_{k,m} \in Q(z, (1+\varepsilon)\alpha\chi(z))$. Donc il existe $0 < r_3 < 1$ tel que

$$\operatorname{Card}\big(\Lambda \cap Q(z,(1+\varepsilon)\alpha\chi(z))\big) \geq 1, \qquad r_3 \leq |z| < 1.$$

Enfin, fixons $R > (1+\varepsilon)^2 2\alpha$; similairement au *Lemme II.4.2*, il existe $0 < r_4 < 1$ tel que pour tout $r_4 \leq |w| < 1$, si

$$z \in \mathbb{D}\big(w, \big(R - (1+\varepsilon)^2 2\alpha\big)\chi(w)\big) \text{ et } \lambda \in Q(z,(1+\varepsilon)\alpha\chi(z))$$

alors

$$\lambda \in \mathbb{D}(w, R\chi(w)) \ , \ z \in Q\big(\lambda, (1+\varepsilon)^2\alpha\chi(\lambda)\big) \text{ et } \chi(z) \leq (1+\varepsilon)^{1/2}\chi(w).$$

En prenant $r_0 \geq \max(r_1, r_2, r_3)$ tel que $r_0 + \chi(r_0) < 1$ et d'après le théorème de Fubini, il vient que pour tout w vérifiant $\max(r_0 + \chi(r_0), r_4) \leq |w| < 1$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}\big(\Lambda \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))\big) &= \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))} \frac{1}{m_2\big(Q\big(\lambda, (1+\varepsilon)^2 \alpha \chi(\lambda)\big)\big)} \int_{Q\left(\lambda, (1+\varepsilon)^2 \alpha\chi(\lambda)\right)} dm_2(z) \\
&\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^5 2\pi} \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))} \int_{Q\left(\lambda, (1+\varepsilon)^2 \alpha\chi(\lambda)\right)} \chi(z)^{-2}\, dm_2(z) \\
&\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^5 2\pi} \int_{\mathbb{D}\left(w, (R-(1+\varepsilon)^2 2\alpha)\chi(w)\right)} \operatorname{Card}\big(\Lambda \cap Q(z, (1+\varepsilon)\alpha\chi(z))\big) \chi(z)^{-2}\, dm_2(z) \\
&\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^5 2\pi} \int_{\mathbb{D}\left(w, (R-(1+\varepsilon)^2 2\alpha)\chi(w)\right)} \chi(z)^{-2}\, dm_2(z) \\
&\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^6 2\pi} \chi(w)^{-2} \pi \big(R - (1+\varepsilon)^2 2\alpha\big)^2 \chi(w)^2 \qquad \geq \frac{\big(R - (1+\varepsilon)^2 2\alpha\big)^2}{2(1+\varepsilon)^6}.
\end{aligned}$$

Faisant tendre $|w|$ vers $1-$, R vers $+\infty$ puis ε vers $0+$, on obtient

$$D_\chi^-(\Lambda) \geq \frac{1}{2\pi},$$

ce qui achève la preuve. □

Lemme II.5.3. *Avec la suite Λ du Lemme II.5.2, la fonction*

$$f(z) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \prod_{\lambda \in \Lambda : |\lambda| = s_k} \frac{1 - z/\lambda}{1 - z\bar{\lambda}}$$

est holomorphe sur $\mathbb{D}$, a Λ pour ensemble de zéros et vérifie

$$|f(z)| \asymp e^{h(z)} \rho_h(z, \Lambda), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{II.5.3}$$

Démonstration. La fonction f est bien définie, holomorphe et d'ensemble de zéros Λ. En effet,

$$f(z) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1 - z^{N_k} s_k^{-N_k}}{1 - z^{N_k} s_k^{N_k}}$$

et pour $0 < R < 1$ fixé, pour tout $|z| \leq R$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|1 - \frac{1 - z^{N_k} s_k^{-N_k}}{1 - z^{N_k} s_k^{N_k}}\right| \leq \frac{|z|^{N_k} s_k^{-N_k}}{1 - |z|^{N_k} s_k^{N_k}} \leq \frac{R^{N_k} s_k^{-N_k}}{1 - R}.$$

D'une part la décroissance sur $]0, 1[$ de la fonction $x \mapsto e^x/x$ implique

$$\frac{r}{s} \leq e^{-(s-r)}, \qquad 0 \leq r \leq s < 1. \tag{II.5.4}$$

D'autre part la décroissance de χ et les *propriétés (a), (b) et (d)* impliquent qu'en prenant $j(R)$ tel que $r_j \leq R < r_{j+1}$, si $k > j(R)$,

$$N_k(s_k - R) \geq N_k(s_k - r_{j+1}) = N_k(s_k - r_k) + N_k \sum_{l=j+1}^{k-1} (r_{l+1} - r_l) \geq c(h)(k-j),$$

et

$$R^{N_k} s_k^{-N_k} \leq e^{-N_k(s_k - R)} \leq e^{-c(h)(k-j)}. \tag{II.5.5}$$

On en déduit

$$\sum_{k>j(R)} R^{N_k} s_k^{-N_k} \leq \sum_{k>j} e^{-c(h)(k-j)} < +\infty.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe un unique $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$r_j \leq r = |z| < r_{j+1}.$$

Nous posons

$$A(z) = -(h(r) - h(0)) + \ln|f(z)| - \ln \rho_h(z, \Lambda).$$

Il s'agit de montrer que $|A(z)| \leq C$, avec C indépendant de z.

Par la formule de Green et le fait que d'après la *définition* (II.5.1),

$$\int_{r_k \leq |w| < r_{k+1}} \Delta h(w) \ln \frac{r}{|w|} \frac{dm_2(w)}{2\pi} = \ln\big(r^{N_k} s_k^{-N_k}\big), \qquad k \in \mathbb{N},$$

on obtient

$$\begin{aligned} A(z) &= -\int_{|w|<r} \Delta h(w) \ln \frac{r}{|w|} \frac{dm_2(w)}{2\pi} + \sum_{k\geq 0} \ln\Big|\frac{1 - z^{N_k} s_k^{-N_k}}{1 - z^{N_k} s_k^{N_k}}\Big| - \ln \rho_h(z, \Lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \ln\Big|\frac{1 - s_k^{N_k} z^{-N_k}}{1 - z^{N_k} s_k^{N_k}}\Big| + \sum_{k>j} \ln\Big|\frac{1 - z^{N_k} s_k^{-N_k}}{1 - z^{N_k} s_k^{N_k}}\Big| + \\ &\quad \Big(-\int_{r_j \leq |w| < r} \Delta h(w) \ln \frac{r}{|w|} \frac{dm_2(w)}{2\pi} + \ln\Big(\Big|\frac{1 - z^{N_j} s_j^{-N_j}}{1 - z^{N_j} s_j^{N_j}}\Big| / \rho_h(z, \Lambda)\Big)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} A_k + \sum_{k>j} C_k + \ (-B_1 + B_2). \end{aligned}$$

Le résultat découle du *Lemme II.5.4* suivant. □

Lemme II.5.4. *Avec les notations de la démonstration du Lemme II.5.3, il existe* c_1 *indépendant de* z *tel que*

(1) $|B_1| = \Big|\displaystyle\int_{r_j\le|w|<r} \Delta h(w)\ln\frac{r}{|w|}\frac{dm_2(w)}{2\pi}\Big| \le c_1$;

(2) $|B_2| = \Big|\ln\Big(\Big|\dfrac{1-z^{N_j}s_j^{-N_j}}{1-z^{N_j}s_j^{N_j}}\Big|/\rho_h(z,\Lambda)\Big)\Big| \le c_1$;

(3) $\Big|\displaystyle\sum_{k>j} C_k\Big| = \Big|\sum_{k>j}\ln\Big|\frac{1-z^{N_k}s_k^{-N_k}}{1-z^{N_k}s_k^{N_k}}\Big|\Big| \le c_1$;

(4) $\Big|\displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} A_k\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{j-1}\ln\Big|\frac{1-s_k^{N_k}z^{-N_k}}{1-z^{N_k}s_k^{N_k}}\Big|\Big| \le c_1.$

Démonstration. Rappelons que $j\in\mathbb{N}$ est tel que $r_j \le r = |z| < r_{j+1}$.

(1). Si $j=0$ alors la formule de Green implique que $|B_1| = h(r)-h(0) \le h(r_1) \le c_1$. Si $j\ge 1$ alors d'après *(b)*,

$$|B_1| \le N_j \ln\frac{r_{j+1}}{r_j} \le \frac{1}{r_1}\sup_k N_k(r_{k+1}-r_k) \le c_1,$$

avec c_1 indépendant de z.

(2). On pose $\lambda_{k,m} = s_k e^{i2\pi m/N_k}$, et soit $m_z\in\mathbb{N}$ tel que $m_z < N_j$ et $-\pi/N_j \le \arg z - 2\pi m_z/N_j < \pi/N_j$.

Puisque $\ln(1-x)\le -x$, $x\in[0,1[$, et $\lim_{s\to 1-}\chi(s)/(1-s) = 0$,

$$\begin{aligned} 2 \ge\ |1-z^{N_j}s_j^{N_j}| &\ \ge\ 1-s_j^{N_j} = 1-e^{N_j\ln(1-(1-s_j))}\\ &\ \ge\ 1-e^{-N_j(1-s_j)} \ge 1-e^{-\inf_k N_k\chi(s_k)\inf_k(1-s_k)/\chi(s_k)} > 0, \end{aligned}$$

d'où

$$|1-z^{N_j}s_j^{N_j}| \asymp 1.$$

D'après (II.5.2), il en résulte

$$e^{2B_2} = \Big|\frac{1-z^{N_j}s_j^{-N_j}}{1-z^{N_j}s_j^{N_j}}\Big|^2/\rho_h(z,\Lambda)^2 \asymp \frac{|1-z^{N_j}s_j^{-N_j}|^2}{N_j^2|1-z/\lambda_{j,m_z}|^2} = B,$$

avec

$$B = \frac{\big(1-(r/s_j)^{N_j}\big)^2 + 4(r/s_j)^{N_j}\big(\sin(N_j|\arg z|/2)\big)^2}{\big(N_j(1-r/s_j)\big)^2 + 4(r/s_j)\big(N_j\sin(|\arg z - 2\pi m_z/N_j|/2)\big)^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2+\delta^2}.$$

Puisque $(2/\pi)x \le \sin x \le x$, $x\in[0,\pi/2]$,

$$\frac{\sin(|N_j\arg z|/2)}{N_j\sin(|\arg z-2\pi m_z/N_j|/2)} \asymp 1, \quad \arg z \ne 0;$$

d'après *(b)*,

$$(r/s_j)^{N_j} \asymp 1, \qquad r > s_0/2,$$

et puisque $\lim_{\varepsilon\to 0+}(e^{\varepsilon}-1)/\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0+}(1-e^{-\varepsilon})/\varepsilon = 1$,

$$\frac{1-(r/s_j)^{N_j}}{N_j(1-r/s_j)} \asymp 1, \qquad r \neq s_j.$$

Il en résulte d'une part

$$B \leq \Big(\frac{\alpha}{\gamma}\Big)^2 + \Big(\frac{\beta}{\delta}\Big)^2 = \Big(\frac{1-(r/s_j)^{N_j}}{N_j(1-r/s_j)}\Big)^2 + (r/s_j)^{N_j-1}\Big(\frac{\sin(N_j|\arg z|/2)}{N_j\sin(|\arg z - 2\pi m_z/N_j|/2)}\Big)^2 \leq c_6$$

et d'autre part qu'il existe $c_7 > 0$ tel que

$$B \geq \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{\gamma^2+\delta^2} \geq \dfrac{1}{4N_0^2+2\pi^2} \geq c_7 & \text{si } r \leq \frac{s_0}{2} \\[3ex] \dfrac{\alpha^2}{2\gamma^2} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1-(r/s_j)^{N_j}}{N_j(1-r/s_j)}\Big)^2 \geq c_7 & \text{si } r > \frac{s_0}{2},\ \gamma^2 \geq \delta^2 \\[3ex] \dfrac{\beta^2}{2\delta^2} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{r}{s_j}\Big)^{N_j-1}\Big(\dfrac{\sin(N_j|\arg z|/2)}{N_j\sin(|\arg z-2\pi m_z/N_j|/2)}\Big)^2 \geq c_7 & \text{si } r > \frac{s_0}{2},\ \delta^2 \geq \gamma^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$|B_2| = |\ln B|/2 \leq \ln\max(c_6, 1/c_7)/2 \leq c_1,$$

avec c_1 indépendant de z.

(3). Notons que si $0 \leq b \leq a \leq c < 1$ alors il existe C ne dépendant que de c tel que

$$\Big|\ln\Big|\frac{1-ae^{i\theta}}{1-be^{i\theta}}\Big|\Big| \leq C\,a, \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{II.5.6}$$

Posant pour tout $k > j$, $a_k = r^{N_k}s_k^{-N_k}$ et $b_k = r^{N_k}s_k^{N_k}$, on a d'après (II.5.5),

$$0 \leq b_k \leq a_k \leq e^{-c(h)(k-j)} \leq e^{-c(h)} < 1.$$

Il résulte de (II.5.6),

$$|C_k| = \Big|\ln\Big|\frac{1-a_ke^{iN_k\arg z}}{1-b_ke^{iN_k\arg z}}\Big|\Big| \leq C\,a_k \leq C\,e^{-c(h)(k-j)}.$$

On en déduit

$$\Big|\sum_{k>j} C_k\Big| \leq C\sum_{k>j} e^{-c(h)(k-j)} = C/(e^{c(h)}-1) \leq c_1,$$

avec c_1 indépendant de z.

(4). Soit $k < j$. D'après *(b) et (d)*,

$$N_k(r - s_k) \geq N_k(r_{k+1} - s_k) \geq \inf_k N_k(r_{k+1} - r_k) \inf_k \frac{r_{k+1} - s_k}{r_{k+1} - r_k} = c_2 > 0,$$

et d'après (II.5.4), $a_k = s_k^{N_k} r^{-N_k} \leq e^{-N_k(r-s_k)} \leq e^{-c_2} < 1$. Soit $b_k = r^{N_k} s_k^{N_k} \leq a_k$. D'après (II.5.6), *(a), (b) et (c)*, on obtient

$$|A_k| = \left|\ln\left|\frac{1 - a_k e^{iN_k \arg z}}{1 - b_k e^{iN_k \arg z}}\right|\right| \leq C_3\, a_k \leq C_3 e^{-N_k(r-s_k)} \leq C_3 e^{-c_4(r-s_k)/\chi(s_k)},$$

avec

$$c_4 = \inf_k N_k \chi(s_k) \geq \inf_k N_k \chi(r_{k+1}) \geq \frac{\inf_k N_k(r_{k+1} - r_k)}{\sup_k (r_{k+1} - r_k)/\chi(r_k)} \inf_k \frac{r_{k+1} - r_k}{r_k - r_{k-1}} > 0.$$

Distinguons maintenant les deux cas possibles pour le poids h. Supposons premièrement que h vérifie la *condition (I)*.
Partitionons $\{k \in \mathbb{N},\, k < j\}$ en

$$S_n = \{k : 1 - s_k \in [2^n(1-r), 2^{n+1}(1-r)[\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Posons $\chi_n = \chi(1 - 2^n(1-r))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ puis $k \in S_n$. Puisque

$$M = \sup_r (1-r)|\chi'(r)|/\chi(r) < +\infty,$$

$$\frac{\chi(s_k)}{\chi_n} \leq \frac{\chi(1 - 2^{n+1}(1-r))}{\chi(1 - 2^n(1-r))} \leq e^{\frac{M}{2^n(1-r)} 2^n(1-r)} = e^M.$$

D'autre part,

$$\frac{\chi(r_{k+1})}{\chi(r_k)} = \frac{r_{k+2} - r_{k+1}}{r_{k+1} - r_k} \frac{\frac{r_{k+1} - r_k}{\chi(r_k)}}{\frac{r_{k+2} - r_{k+1}}{\chi(r_{k+1})}}$$

et

$$\frac{s_{k+1} - s_k}{\chi(r_{k+1})} = \frac{r_{k+2} - r_{k+1}}{\chi(r_{k+1})} \Big(1 + \frac{r_{k+1} - s_k}{r_{k+1} - r_k} \frac{1}{\frac{r_{k+2} - r_{k+1}}{r_{k+1} - r_k}} - \frac{r_{k+2} - s_{k+1}}{r_{k+2} - r_{k+1}}\Big);$$

alors d'après *(a), (c) et (d)*,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{\chi(s_k)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{\chi(r_{k+1})} = \sqrt{2\pi}.$$

Si $n = 0$, alors

$$\frac{r - s_k}{\chi(s_k)} \geq \frac{s_{j-1} - s_k}{\chi(s_k)} = \sum_{l=k}^{j-2} \frac{s_{l+1} - s_l}{\chi(s_k)} \geq (j - k - 1) \inf_l \frac{s_{l+1} - s_l}{\chi(s_l)} \frac{\chi_0}{\chi(s_k)} \geq c_5(j - k - 1),$$

avec $c_5 = e^{-M} \inf_k \frac{s_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)} > 0$, et

$$\sum_{k\in S_0} |A_k| \leq C_3 \sum_{k\in S_0} e^{-c_4(r-s_k)/\chi(s_k)} \leq C_3 \sum_{k\in S_0} e^{-c_4 c_5 (j-k-1)} \leq C_3 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-c_4 c_5 k} = c_0.$$

Si $n \neq 0$, alors posons pour $w \in \mathbb{C}$ tel que $s_k < |w| < 1/s_k$,

$$\tilde{A}_k(w) = \ln\Big|\frac{1 - s_k^{N_k} w^{-N_k}}{1 - w^{N_k} s_k^{N_k}}\Big|.$$

D'après le *Lemme II.2.1*, $\chi_n = o(2^n(1-r))$ quand $2^n(1-r) \to 0$, et

$$2^n(1-r)/\chi_n \geq c_6 > 0.$$

Soit w_n tel que $|w_n| = 1 - 2^{n-1}(1-r)$. D'une part, d'après (II.5.4),

$$s_k^{N_k}|w_n|^{-N_k} \leq e^{-N_k(|w_n|-s_k)} \leq e^{-\frac{c_7}{\chi_n}2^{n-1}(1-r)} \leq e^{-c_7 c_6/2} < 1,$$

avec $c_7 = e^{-M} \inf_k N_k \chi(s_k) > 0$, et d'après (II.5.6),

$$|\tilde{A}_k(w_n)| \leq c_8\, s_k^{N_k} |w_n|^{-N_k} \leq c_8\, e^{-c_7 2^{n-1}(1-r)/\chi_n}.$$

D'autre part, si $S_n = \{k_0, k_0+1, \cdots, k_1\}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(S_n) &\leq 1 + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{s_{k+1}-s_k}{\chi_n} \frac{1}{\inf_k \frac{s_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)}} \\
&\leq 1 + \frac{s_{k_1} - s_{k_0}}{\chi_n \inf_k \frac{s_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)}} \\
&\leq 1 + \frac{2^n(1-r)}{\chi_n \inf_k \frac{s_{k+1}-s_k}{\chi(s_k)}} \qquad \leq c_9\, \frac{2^n(1-r)}{\chi_n}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k\in S_n} \tilde{A}_k(w_n)\Big| &\leq \operatorname{Card}(S_n) \sup_{k\in S_n} |\tilde{A}_k(w_n)| \leq \frac{2c_8c_9}{c_7} \frac{c_7 2^{n-1}(1-r)}{\chi_n} e^{-c_7 2^{n-1}(1-r)/\chi_n} \\
&\leq \frac{2c_8c_9}{ec_7} = c_{10}. \qquad \text{(II.5.7)}
\end{aligned}$$

Notons que $\tilde{A}_k(w) = 0$, $w \in \partial\mathbb{D}$, et $\tilde{A}_k$ est harmonique sur l'anneau

$$\mathcal{T}_n = \big\{w : 1 - 2^{n-1}(1-r) \leq |w| \leq 1\big\}.$$

Le principe du maximum appliqué sur cet anneau à la fonction continue et sous–harmonique

$$w \in \mathcal{T}_n \mapsto \Big|\sum_{k\in S_n} \tilde{A}_k(w)\Big| - c_{10} \frac{\ln(1/|w|)}{\ln(1/(1-2^{n-1}(1-r)))},$$

qui est négative sur le bord de $\mathcal{T}_n$ d'après (II.5.7), nous donne

$$\Big|\sum_{k\in S_n} A_k\Big| = \Big|\sum_{k\in S_n} \tilde{A}_k(z)\Big| \le c_{10}\frac{\ln\frac{1}{r}}{\ln\frac{1}{1-2^{n-1}(1-r)}} \le c_{10}\frac{1-r}{2^{n-1}(1-r)} = \frac{c_{10}}{2^{n-1}}.$$

Il en résulte

$$\Big|\sum_{k<j} A_k\Big| = \Big|\sum_{n}\sum_{k\in S_n} A_k\Big| \le c_0 + 2c_{10} \le c_1,$$

avec c_1 indépendant de z.

Supposons deuxièmement que h vérifie la *condition (II)*.
Fixons $k<j$. Avec $c_5 = s_0\chi(s_0)$ et $c_6 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\chi(s_k - c_5\chi(s_k))}{\chi(s_k)}$,

$$\begin{aligned} e^{-c_4(r-s_k)/\chi(s_k)} &\le \sup_{x\in[s_k-c_5\chi(s_k),s_k]} \frac{\chi(x)e^{c_4(r-x)/\chi(x)}}{c_5\chi(s_k)e^{c_4(r-s_k)/\chi(s_k)}} \int_{s_k-c_5\chi(s_k)}^{s_k} e^{-c_4(r-x)/\chi(x)}\frac{dx}{\chi(x)} \\ &\le \frac{c_6}{c_5}e^{c_4c_5}\int_{s_k-c_5\chi(s_k)}^{s_k} e^{-c_4(r-x)/\chi(x)}\frac{dx}{\chi(x)}. \end{aligned}$$

Par sommation,

$$\sum_{k<j}|A_k| \le C_3\frac{c_6}{c_5}e^{c_4c_5}\sum_{k<j}\int_{s_k-c_5\chi(s_k)}^{s_k} e^{-c_4(r-x)/\chi(x)}\frac{dx}{\chi(x)} \le C_3\frac{c_6}{c_5}e^{c_4c_5}\int_0^r e^{-c_4(r-x)/\chi(x)}\frac{dx}{\chi(x)}.$$

Puisque $\lim_{x\to 1-}\chi'(x)\ln\chi(x) = 0$, il existe $t_0\in[0,1[$ tel que pour tout $x\ge t_0$,

$$|\chi'(x)| \le c_4/4, \quad \chi(x)\le 1 \ \text{ et } \ |\chi'(x)\ln\chi(x)| \le c_4/4,$$

et en choisissant $t\in[0,r[$ tel que $\chi(t) = 2\chi(r)$, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x\in[t_0,t]$,

$$\frac{\chi(x)}{r-x} = \frac{1}{1-\chi(r)/\chi(x)}\frac{\chi(x)-\chi(r)}{r-x} \le \frac{c_4}{2}$$

et

$$\frac{\chi(x)}{r-x}\ln\frac{1}{\chi(x)} \le 2\sup_{y\in[x,r]}|\chi'(y)\ln\chi(y)| \le \frac{c_4}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^r e^{-c_4(r-x)/\chi(x)}\frac{dx}{\chi(x)} &= \int_0^{t_0} e^{-c_4\frac{r-x}{\chi(x)}}\frac{dx}{\chi(x)} + \int_{t_0}^t e^{-\frac{r-x}{\chi(x)}\left(c_4-\frac{\chi(x)}{r-x}\ln\frac{1}{\chi(x)}\right)}dx + \int_t^r e^{-c_4\frac{r-x}{\chi(x)}}\frac{dx}{\chi(x)} \\ &\le \int_0^{t_0} e^{-c_4\frac{t_0-x}{\chi(0)}}\frac{dx}{\chi(t_0)} + \Big|\int_{t_0}^t e^{-\frac{2}{c_4}(c_4-c_4/2)}dx\Big| + \int_t^r e^{-c_4\frac{r-x}{\chi(t)}}\frac{dx}{\chi(r)} \\ &\le \frac{\chi(0)}{c_4\chi(t_0)} + \frac{1}{e} + \frac{2}{c_4} \qquad = \frac{2+\chi(0)/\chi(t_0)}{c_4} + \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\sum_{k<j}|A_k| \le C_3\frac{c_6e^{c_4c_5}}{c_5}\Big(\frac{2+\chi(0)/\chi(t_0)}{c_4} + \frac{1}{e}\Big) \le c_1,$$

avec c_1 indépendant de z. $\square$

En combinant les *Lemmes II.5.2 et II.5.3*, le *Théorème II.1.1* est démontré. Nous aurons aussi besoin par la suite du résultat suivant.

Lemme II.5.5. *Soit* $s \in]0,1[$ *suffisamment proche de* 1 *; nous pouvons définir* $\{r_k\}$, $\{s_k\}$, (N_k) *et* Λ *comme ci–dessus de sorte que* $s \in \Lambda$ *et la relation* (II.5.3) *est vérifiée uniformément en* s.

Démonstration. Soient les suites $\{r_k\}$, $\{s_k\}$ et (N_k) du *Lemme II.5.1*. Etant donné $r_{j+1} \le s < r_{j+2}$, $j \in \mathbb{N}$, nous pouvons trouver $0 < r'_j < s < r'_{j+1} < 1$ tels que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{r'_j \le |w| < r'_{j+1}} \Delta h(w) \frac{dm_2(w)}{2\pi} & = \quad N_j \\ \displaystyle\int_{r'_j \le |w| < r'_{j+1}} \Delta h(w) \ln \frac{1}{|w|} \frac{dm_2(w)}{2\pi} & = \quad N_j \ln \frac{1}{s} \ . \end{cases}$$

Nous posons $N'_j = N_j$ et définissons ensuite r'^{*}_{j+t}, r'_{j+1+t} et N'_{j+t} pour $t \in \mathbb{N}^*$, comme dans la preuve du *Lemme II.5.1*.

De plus, nous définissons itérativement, à l'étape $t \in \mathbb{N}^*$, le nombre $r'^{*}_{j-t+1} \in]0, r'_{j-t+1}[$ par l'égalité

$$(r'_{j-t+1} - r'^{*}_{j-t+1}) \int_{r'^{*}_{j-t+1} \le |w| < r'_{j-t+1}} \Delta h(w) \frac{dm_2(w)}{2\pi} = 2\pi,$$

et le nombre r'_{j-t} est le plus grand nombre plus petit que r'^{*}_{j-t+1} et tel que

$$\int_{r'_{j-t} \le |w| < r'_{j-t+1}} \Delta h(w) \frac{dm_2(w)}{2\pi} = N'_{j-t} \in \mathbb{N}^*.$$

Nous arrêtons les itérations quand

$$r'_p \int_{|w| < r'_p} \Delta h(w) \frac{dm_2(w)}{2\pi} \le 2\pi.$$

Il est clair que $r'_p \le c(h) < 1$.

Enfin, nous posons $r_0 = 0$, $N_0 = 1$, $r_k = r'_{k+p-1}$, $N_k = N'_{k+p-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, et définissons s_k, $k \in \mathbb{N}$, par

$$\ln \frac{1}{s_k} = \frac{1}{N_k} \int_{r_k \le |w| < r_{k+1}} \Delta h(w) \ln \frac{1}{|w|} \frac{dm_2(w)}{2\pi}.$$

En reprenant les preuves des *Lemmes II.5.1, II.5.2 et II.5.3*, on peut conclure. $\square$

CHAPITRE III

Echantillonnage pour les poids à croissance rapide

III.1. Introduction

Soit h un poids vérifiant les conditions du chapitre II. Nous donnons une caractérisation complète des suites d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Plus précisement nous avons

Théorème III.1.1. *Soit h un poids vérifiant la condition (I) ou (II). Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si Γ contient un ensemble Γ' ρ_h–séparé tel que*

$$D_\chi^-(\Gamma') = \varliminf_{R\to+\infty} \varliminf_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma' \cap \mathbb{D}(w, R\chi(w))\big)}{\pi R^2} > \frac{1}{2\pi} . \tag{III.1.1}$$

Pour démontrer la suffisance de cette condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on raisonne par l'absurde en distinguant deux cas. Dans le premier cas, la majoration de la χ–densité d'un ensemble de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ prouvée au *Chapitre II* donne la contradiction recherchée. Dans le second cas, on ramène notre problème à un ensemble de zéros pour un espace de Fock classique ; l'estimation de la densité de cet ensemble de zéros, qui résulte de la formule de Jensen, donne la contradiction recherchée.

Pour démontrer la nécessité de cette condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on adopte l'approche de Lyubarskii et Seip [**15**] basée sur la fonction pic. Nous construisons d'abord, à partir de la fonction de $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ d'ensemble de zéros de χ–densité maximale du *Chapitre II*, pour tout $z \in \mathbb{D}$ assez proche du cercle unité, une fonction pic f_z qui vérifie dans un voisinage de z

$$|f_z(w)| \asymp e^{h(w)-|w-z|^2\Delta h(z)/4}.$$

Ensuite on envoie les points de la suite Γ' vers le plan de sorte que la densité d'une nouvelle suite dans le plan corresponde au cas des espaces de Fock classiques. On se ramène ainsi au problème résolu par Seip de la caractérisation des suites d'échantillonnage pour les espaces de Fock classiques.

III.2. Condition suffisante d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

On est dors et déjà à même de prouver une implication du Théorème principal III.1.1.

Preuve de la suffisance de la condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Nous allons montrer que si $\Gamma \subset \mathbb{D}$ ρ_h–séparé est tel que $D_\chi^-(\Gamma) > 1/(2\pi)$, alors Γ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe Γ sous–ensemble ρ_h–séparé de $\mathbb{D}$, de χ–densité $D_\chi^-(\Gamma) > 1/(2\pi)$, qui n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Alors il existe une suite de fonctions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, $\|f_j\|_h = 1$ et

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{\zeta\in\Gamma} |f_j(\zeta)|e^{-h(\zeta)} = 0.$$

Pour tout j, puisque $\|f_j\|_h = 1$, il existe $w_j \in \mathbb{D}$ tel que $|f_j(w_j)|e^{-h(w_j)} \geq 1/2$. $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ étant un compact de $\mathbb{C}$, il existe une sous–suite de $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, qu'on notera encore (w_j), qui converge vers $\tilde{w} \in \overline{\mathbb{D}}$. Il y a deux cas : soit (A) $\lim\limits_{j\to+\infty} w_j = \tilde{w} \in \mathbb{D}$, soit (B) $\lim\limits_{j\to+\infty} |w_j| = 1-$.

Dans le cas (A), le théorème des familles normales nous assure l'existence d'une sous–suite de (f_j), qu'on notera encore (f_j), qui converge vers f uniformément sur tout compact. La fonction f possède les propriétés suivantes

$$f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D}) \ , \quad f(\tilde{w}) \neq 0 \quad \text{et} \quad f|_\Gamma = 0.$$

En effet pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, pour tout j, $|f_j(z)|e^{-h(z)} \leq \|f_j\|_h \leq 1$, d'où en faisant tendre j vers $+\infty$, $\|f\|_h \leq 1$. De plus pour tout j, $|f_j(w_j)| \geq e^{h(w_j)}/2 \geq 1/2$ et

$$\begin{aligned} |f_j(w_j) - f(\tilde{w})| &\leq |f_j(w_j) - f(w_j)| + |f(w_j) - f(\tilde{w})| \\ &\leq \sup_{\mathbb{D}(\tilde{w},(1-|\tilde{w}|)/2)} |f_j - f| + |f(w_j) - f(\tilde{w})| \ = o(1), \quad j \to +\infty, \end{aligned}$$

d'où il vient $|f(\tilde{w})| \geq 1/2 > 0$. Enfin pour $z \in \Gamma$ fixé, pour tout j, nous avons $|f_j(z)| \leq e^{h(z)} \sup_{\zeta\in\Gamma} |f_j(\zeta)|e^{-h(\zeta)}$, d'où en faisant tendre j vers $+\infty$, il vient $f|_\Gamma = 0$.

Si on note $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble de zéros de f, la *Proposition II.4.3* donne

$$D_\chi^-(\Gamma) \leq D_\chi^-(\tilde{\Gamma}) \leq \frac{1}{2\pi},$$

ce qui contredit les hypothèses du Théorème. Par conséquent le cas (A) est impossible.

Dans le cas (B), nous définissons

$$g_j(w) = f_j\Big(w\chi(w_j)\frac{w_j}{|w_j|} + w_j\Big)e^{-h(w_j)-wh'(|w_j|)\chi(w_j)-w^2h''(|w_j|)\chi(w_j)^2/4}.$$

D'après le *Lemme II.4.2.(a)*, pour tout $R > 0$, les fonctions g_j, $j \geq j(R)$, sont définies et holomorphes sur $R\mathbb{D}$. En appliquant la formule de Taylor–Lagrange et en utilisant les estimations du poids données par le *Lemme II.2.5* et les *conditions* (II.1.1) ($h''(r)\chi^2(r) \to 1$ implique $h'(r)\chi^2(r) \to 0$ quand $r \to 1-$), nous obtenons que pour j suffisamment grand et pour $w = a + bi \in R\mathbb{D}$, avec $c_j > |w_j|$,

$$\begin{aligned}
&\ln|g_j(w)| \\
&\leq\ h((a+bi)\chi(w_j)w_j/|w_j| + w_j) - h(w_j) - ah'(|w_j|)\chi(w_j) - (a^2-b^2)h''(|w_j|)\chi(w_j)^2/4 \\
&\leq\ h\Big(|w_j|\sqrt{1+2a\chi(w_j)/|w_j| + (a^2+b^2)\chi(w_j)^2/|w_j|^2}\Big) - h(|w_j|) - \\
&\qquad\qquad ah'(|w_j|)\chi(w_j) - (a^2-b^2)h''(|w_j|)\chi(w_j)^2/4 \\
&\leq\ h\big(|w_j| + a\chi(w_j) + O(1)\chi(w_j)^2/|w_j|\big) - h(|w_j|) - \\
&\qquad\qquad ah'(|w_j|)\chi(w_j) - (a^2-b^2)h''(|w_j|)\chi(w_j)^2/4 \\
&\leq\ \big(h'(|w_j|)\chi(w_j)^2 + h''(c_j)\chi(c_j)^3\big)O(1)/|w_j| + (a^2+b^2)(1+o(1))/4 \\
&\leq\ |w|^2/4 + o(1), \quad j \to +\infty.
\end{aligned}$$

De plus, $|g_j(0)| \geq 1/2$. D'après le théorème des familles normales, il existe une sous–suite de (g_j), qu'on notera encore (g_j), qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction entière g vérifiant

$$\begin{aligned}
\ln|g(w)| &\leq |w|^2/4, \qquad w \in \mathbb{C}; \\
|g(0)| &\geq 1/2;
\end{aligned}$$

de plus, g s'annule sur Γ' avec

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\,(\Gamma' \cap R\mathbb{D})}{\pi R^2} > \frac{1}{2\pi} \tag{III.2.1}$$

(pour la preuve de (III.2.1) voir le *Lemme III.2.1* suivant).

Si l'on note $\tilde{\Gamma}_g$ l'ensemble de zéros de g, la formule de Jensen donne, pour tout $R > 0$,

$$\sum_{k:a_k\in\tilde{\Gamma}_g\cap R\mathbb{D}} \ln\frac{R}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{i\theta})|\,d\theta - \ln|g(0)| \leq R^2/4 + \ln 2.$$

Au contraire, d'après la Proposition 4.2 [**11**, p.100], si $n_g(R)$ désigne le nombre de zéros de g dans $R\mathbb{D}$ en comptant la multiplicité, on a

$$\sum_{k:a_k\in\tilde{\Gamma}_g\cap R\mathbb{D}} \ln\frac{R}{|a_k|} = \int_0^R \frac{n_g(x)}{x}\,dx.$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ assez petit pour qu'il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout $R \geq R_1$, $\text{Card}\,(\Gamma' \cap R\mathbb{D}) \geq \frac{1+\varepsilon}{2}R^2$. Il vient que pour tout $R \geq R_1$,

$$\sum_{k:a_k\in\tilde{\Gamma}_g\cap R\mathbb{D}} \ln\frac{R}{|a_k|} \geq \int_{R_1}^R \frac{n_g(x)}{x}\,dx \geq \int_{R_1}^R \frac{1+\varepsilon}{2}x\,dx \geq (1+\varepsilon)R^2/4.$$

Il en résulte

$$(1+\varepsilon)R^2/4 \leq R^2/4 + \ln 2, \quad \text{et} \quad R^2 \leq 4\ln 2/\varepsilon, \quad R \to +\infty,$$

ce qui est absurde. Par conséquent le cas (B) est lui aussi impossible. $\square$

Avec les notations ci–dessus, nous avons

Lemme III.2.1. *La fonction g s'annule sur Γ' avec*

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{\text{Card}\,(\Gamma' \cap R\mathbb{D})}{\pi R^2} > \frac{1}{2\pi}.$$

Démonstration. L'hypothèse $D^-_\chi(\Gamma) > 1/(2\pi)$ implique, avec $\lim\limits_{j\to+\infty}|w_j| = 1-$, que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout $R \geq R_1$, il existe $J \geq j(R)$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$\text{Card}\,\big(\Gamma \cap \mathbb{D}(w_j, R\chi(w_j))\big) > \frac{1+\varepsilon}{2}R^2.$$

Soit $j \geq J$; puisque

$$\begin{array}{rccl} B_j : & R\mathbb{D} & \to & \mathbb{D}(w_j, R\chi(w_j)) \\ & w & \mapsto & w\chi(w_j)w_j/|w_j| + w_j \end{array}$$

est une bijection, il existe $[R^2(1+\varepsilon)/2]+1$ points distincts $\{Z_j^k\}_{0\leq k\leq[R^2(1+\varepsilon)/2]}$ de $R\mathbb{D}$ tels que $B_j(Z_j^k) \in \Gamma \cap \mathbb{D}(w_j, R\chi(w_j))$. Puisque $R\overline{\mathbb{D}}$ est compact dans $\mathbb{C}$, on peut définir pour $0 \leq k \leq [R^2(1+\varepsilon)/2]$,

$$Z_k = \lim_{j\to+\infty} Z^k_{\sigma(j)} \in R\overline{\mathbb{D}},$$

où σ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante. D'une part, pour k fixé,

$$\begin{aligned} |g(Z_k)| &\leq |g(Z_k) - g(Z^k_{\sigma(j)})| + |g(Z^k_{\sigma(j)}) - g_{\sigma(j)}(Z^k_{\sigma(j)})| + |g_{\sigma(j)}(Z^k_{\sigma(j)})| \\ &\leq |g(Z_k) - g(Z^k_{\sigma(j)})| + \sup_{R\mathbb{D}}|g - g_{\sigma(j)}| + e^{R^2/4+o(1)}\sup_{\zeta\in\Gamma}|f_{\sigma(j)}(\zeta)|e^{-h(\zeta)} = o(1), \quad j \to +\infty, \end{aligned}$$

d'où $g(Z_k) = 0$. D'autre part on a, pour $k_1 \neq k_2$, puisque

$$B_j^{-1}(z) = z\frac{|w_j|}{w_j\chi(w_j)} - \frac{|w_j|}{\chi(w_j)}$$

et puisque Γ est ρ_h–séparé,

$$\begin{aligned} |Z_j^{k_2} - Z_j^{k_1}| &= \left|B_j^{-1}(B_j(Z_j^{k_2})) - B_j^{-1}(B_j(Z_j^{k_1}))\right| = |B_j(Z_j^{k_2}) - B_j(Z_j^{k_1})|/\chi(w_j) \\ &\geq \rho_h(\Gamma)\chi(|w_j| + R\chi(w_j))/\chi(w_j), \end{aligned}$$

d'où faisant tendre j vers $+\infty$, d'après le *Lemme II.2.5*,

$$|Z_{k_2} - Z_{k_1}| \geq \rho_h(\Gamma) > 0.$$

Il en résulte que g s'annule sur Γ' avec $\Gamma' \cap R\overline{\mathbb{D}} = \{Z_k\}_{0\leq k\leq [R^2(1+\varepsilon)/2]}$ et donc $\mathrm{Card}\left(\Gamma' \cap R\overline{\mathbb{D}}\right) > \dfrac{1+\varepsilon}{2}R^2$, $R \geq R_1$. On en déduit par homothétie, que pour tout $R \geq R_1(1+\varepsilon)^{1/4}$, $\mathrm{Card}\left(\Gamma' \cap R\mathbb{D}\right) > \dfrac{(1+\varepsilon)^{1/2}}{2}R^2$. En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient

$$\underline{\lim}_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\left(\Gamma' \cap R\mathbb{D}\right)}{\pi R^2} > \frac{1}{2\pi}.$$

$\square$

III.3. Condition nécessaire d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

III.3.1. Fonction pic. Pour construire la fonction pic, nous avons besoin des lemmes suivants (voir aussi [**15**]). On désignera par d_2 la distance euclidienne de $\mathbb{C}$.

Lemme III.3.1. *Soient*

$$\Sigma = \Sigma_R = (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \cap R^2\mathbb{D}, \qquad R > 1,$$

$$Q_\lambda = \left\{w \in \mathbb{C} \ : \ |\mathrm{Re}\,(w-\lambda)| < 1/2,\, |\mathrm{Im}\,(w-\lambda)| < 1/2\right\}, \qquad \lambda \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z},$$

$$Q = \cup_{\lambda\in\Sigma} Q_\lambda$$

et

$$B_\lambda(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{Q_\lambda} \ln|1 - z/w|\, dm_2(w) - \ln|1 - z/\lambda|, & z \in \mathbb{C}\setminus\Sigma,\ \lambda \in \Sigma\setminus\{0\} \\ \\ \displaystyle\int_{Q_0} \ln|1 - z/w|\, dm_2(w) - \ln|z|, & z \in \mathbb{C}^*,\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Alors uniformément en R,

$$\sum_{\lambda\in\Sigma} B_\lambda(z) = \begin{cases} O(1) - \ln d_2(z,\Sigma), & z \in \overline{Q}\setminus\Sigma \\ O(1), & z \notin \overline{Q}. \end{cases}$$

Démonstration. Notons d'abord que

$Q_{\lambda_1} \cap Q_{\lambda_2} = \emptyset$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$Q_\lambda = \lambda + Q_0 = -Q_{-\lambda}$,

$\frac{1}{2}\mathbb{D} \subset Q_0 \subset \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{D}$,

$(R^2-1)\mathbb{D} \subset Q \subset \overline{Q} \subset (R^2+1)\mathbb{D}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$B_0(z) = \int_{Q_0} |\ln|w||\, dm_2(w) + \int_{Q_0} \ln|z-w|\, dm_2(w) - \ln|z|.$$

Donc

$$B_0(z) = O(1) - \ln|z| = O(1) - \ln d_2(z,\Sigma), \qquad z \in \overline{Q_0},$$

et pour $z \notin \overline{Q_0}$, puisque $|z| \geq 1/2$,

$$\begin{aligned} B_0(z) &= O(1) + \int_{Q_0\setminus\mathbb{D}(z,1)} \ln|z-w|\, dm_2(w) - \ln|z| \\ &= O(1) + O(1)\max\big(\ln(|z|+1) - \ln|z|, \ln\max(|z|,2) - \ln(\max(|z|,2)-1)\big) \\ &= O(1), \qquad z \notin \overline{Q_0}. \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \Sigma\setminus\{0\}$ alors par translation, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, on a

$$\begin{aligned} B_\lambda(z) &= \int_{Q_0} \ln\Big|\frac{\lambda - z + w}{\lambda - z}\frac{\lambda}{\lambda + w}\Big|\, dm_2(w) \\ &= \int_{Q_0} \ln\Big|1 + \frac{w}{\lambda - z}\Big|\, dm_2(w) - \int_{Q_0} \ln\Big|1 + \frac{w}{\lambda}\Big|\, dm_2(w) \\ &= B_0(z-\lambda) - B_0(-\lambda). \end{aligned}$$

Prenons λ_0 un élément de Σ tel que $d_2(z,\Sigma) = d_2(z,\lambda_0)$, puis λ_j, $j = 1,2,...,8$, les huit éléments de $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ tels que les carrés Q_{λ_j}, $j = 1,2,...,8$, sont les huit carrés entourant le carré Q_{λ_0}.

Soit $\lambda = \lambda_j, j = 1,2,...,8$, avec $z \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, ou $\lambda = \lambda_0$ avec $z \notin \overline{Q}$. Puisque $|z-\lambda| \geq 1/2$ et $|\lambda| \geq 1$, on se ramène au cas où $\lambda = 0$ et on a

$$B_\lambda(z) = B_0(z-\lambda) - B_0(-\lambda) = O(1).$$

Soit $\lambda = \lambda_0$ avec $z \in \overline{Q}$. Puisque $z - \lambda \in \overline{Q_0}$ et $|\lambda| \geq 1$,

$$B_\lambda(z) = O(1) - \ln|z-\lambda| - O(1) = O(1) - \ln d_2(z,\Sigma).$$

Soit $\lambda \in \Sigma \setminus \{0, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_8\}$, avec $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Puisque $|\lambda - z| \geq 1$,

$$\big|\ln|1+W| - \mathrm{Re}\,(W - W^2/2)\big| \leq \big((1-1/\sqrt{2})^{-3}/3\big)\,|W|^3, \quad |W| \leq 1/\sqrt{2},$$

et par rotations,

$$\int_{Q_0} w\, dm_2(w) = \int_{Q_0} w^2\, dm_2(w) = 0,$$

nous avons

$$|B_\lambda(z)| \leq \frac{1}{3(\sqrt{2}-1)^3}\Big(\frac{1}{|\lambda|^3} + \frac{1}{|\lambda - z|^3}\Big).$$

Puisqu'en considérant $\lambda_z \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ tel que $z \in \overline{Q_{\lambda_z}}$, par translation,

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\setminus\{\lambda_z\}} \frac{1}{|\lambda - z|^3} &\leq \frac{1}{(1-1/\sqrt{2})^3} \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|^3} \\
&= 4(1-1/\sqrt{2})^{-3} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}^*} (l^2+m^2)^{-3/2} \\
&\leq 4(1-1/\sqrt{2})^{-3} \Big(\sum_{m\in\mathbb{N}^*} m^{-3} + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} (l^2+x^2)^{-3/2}\, dx\Big) \\
&\leq 4(1-1/\sqrt{2})^{-3} \Big(\sum_{l\in\mathbb{N}^*} l^{-3} + \int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-3/2}\, dx \sum_{l\in\mathbb{N}^*} l^{-2}\Big) \\
&= O(1),
\end{aligned}$$

il vient

$$\sum_{\lambda \in \Sigma \setminus \{0, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_8\}} B_\lambda(z) = O(1).$$

Il en résulte qu'uniformément en R que

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Sigma} B_\lambda(z) &= \sum_{\lambda \in \{0,\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_8\}} B_\lambda(z) + \sum_{\lambda \in \Sigma\setminus\{0,\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_8\}} B_\lambda(z) \\
&= \begin{cases} O(1) - \ln d_2(z,\Sigma), & z \in \overline{Q} \setminus \Sigma \\ O(1), & z \notin \overline{Q}. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant nous donne des estimations précises sur les produits finis de Weierstrass.

Lemme III.3.2. *Soit* $\Sigma = \Sigma_R = (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \cap R^2\mathbb{D}$, $R > 1$, *et soit*

$$P_R(z) = z \prod_{\lambda \in \Sigma \setminus \{0\}} \Bigl(1 - \frac{z}{\lambda}\Bigr).$$

Alors uniformément en $R \geq 6$,

$$\begin{aligned} |P_R(z)| &\asymp d_2(z,\Sigma) e^{(\pi/2)|z|^2}, && |z| \leq R, \\ |P_R(z)| &\geq c\ d_2(z,\Sigma)\Bigl(\tfrac{e|z|}{R}\Bigr)^{(\pi/2)R^2}, && |z| \geq R. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons

$$\int_{(R^2+1)\mathbb{D}} \ln\Bigl|1 - \frac{z}{w}\Bigr|\, dm_2(w) = |z|^2 \int_{((R^2+1)/|z|)\mathbb{D}} \ln\Bigl|1 - \frac{1}{W}\Bigr|\, dm_2(W), \quad z \neq 0.$$

En appliquant deux fois le théorème de Cauchy sur les intégrales curvilignes,

$$\begin{aligned} \int_{(R^2+1)\mathbb{D}} \ln\Bigl|1 - \frac{z}{w}\Bigr|\, dm_2(w) &= |z|^2 \int_{\mathbb{D}} \ln\Bigl|1 - \frac{1}{W}\Bigr|\, dm_2(W) \\ &= |z|^2 \int_{\mathbb{D}} \ln\frac{1}{|W|}\, dm_2(W) \quad = \frac{\pi}{2}|z|^2, \quad |z| \leq R^2+1, \end{aligned} \tag{III.3.1}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{(R^2+1)\mathbb{D}} \ln\Bigl|1 - \frac{z}{w}\Bigr|\, dm_2(w) &= |z|^2 \int_{((R^2+1)/|z|)\mathbb{D}} \ln\frac{1}{|W|}\, dm_2(W) \\ = 2\pi|z|^2 \int_0^{(R^2+1)/|z|} x\ln(1/x)\, dx &= \frac{\pi}{2}(R^2+1)^2 \ln\frac{e|z|^2}{(R^2+1)^2}, \quad |z| > R^2+1. \end{aligned} \tag{III.3.2}$$

De plus, si $|z| \leq (R^2-1)/2$ alors, puisque

$$\bigl|\ln|1+W| - \operatorname{Re} W\bigr| \leq 2|W|^2, \quad |W| \leq 1/2,$$

$$\int_{(R^2+1)\mathbb{D}} \frac{dm_2(w)}{w} = (R^2+1)\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, d\theta = 0$$

et par symétrie,

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{dm_2(w)}{w} &= \sum_{\lambda\in\Sigma} \int_{Q_\lambda} \frac{dm_2(w)}{w} \\ &= \int_{Q_0} \frac{dm_2(w)}{w} + \sum_{\lambda\in\Sigma:\mathrm{Im}\ \lambda>0 \text{ ou } \mathrm{Im}\ \lambda=0,\mathrm{Re}\ \lambda>0} \Bigl(\int_{Q_\lambda} \frac{dm_2(w)}{w} + \int_{Q_{-\lambda}} \frac{dm_2(w)}{w}\Bigr) \\ &= \int_{w\in Q_0:\mathrm{Im}\ w>0} \Bigl(\frac{1}{w} - \frac{1}{w}\Bigr)\, dm_2(w) + \sum_{\lambda\in\Sigma:\mathrm{Im}\ \lambda>0 \text{ ou } \mathrm{Im}\ \lambda=0,\mathrm{Re}\ \lambda>0} \int_{Q_\lambda} 0\, dm_2(w) \\ &= 0, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q} \ln\Big|1-\frac{z}{w}\Big|\,dm_2(w)\Big| \\
&\leq \Big|\int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q} \operatorname{Re}\frac{z}{w}\,dm_2(w)\Big| + 2\int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q}\Big|\frac{z}{w}\Big|^2\,dm_2(w) \\
&\leq 4\pi|z|^2\ln\frac{R^2+1}{R^2-1} \\
&\leq \frac{8\pi|z|^2}{R^2-1}.
\end{aligned} \tag{III.3.3}$$

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, puisque

$$\int_\Omega |\ln|z-w||\,dm_2(w) \leq \frac{\pi}{2} + m_2(\Omega)\ln\Big(|z|+1+\sup_{w\in\Omega}|w|\Big), \qquad \Omega\subset\mathbb{C},$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q} \ln\Big|1-\frac{z}{w}\Big|\,dm_2(w)\Big| \\
&\leq \int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q} |\ln|z-w||\,dm_2(w) + \int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q}|\ln|w||\,dm_2(w) \\
&\leq \pi + m_2\big((R^2+1)\mathbb{D}\setminus(R^2-1)\mathbb{D}\big)\big(\ln(|z|+R^2+1)+\ln(R^2+1)\big) \\
&\leq \pi + 8\pi R^2\ln(|z|+R^2+1) \\
&\leq 10\pi R^2\ln(|z|+R^2+1).
\end{aligned} \tag{III.3.4}$$

Et puisque

$$\begin{aligned}
&\int_Q \ln\Big|1-\frac{z}{w}\Big|\,dm_2(w) \\
&= \int_{(R^2+1)\mathbb{D}} \ln\Big|1-\frac{z}{w}\Big|\,dm_2(w) - \int_{(R^2+1)\mathbb{D}\setminus Q}\ln\Big|1-\frac{z}{w}\Big|\,dm_2(w),
\end{aligned}$$

il en résulte, d'après (III.3.1), (III.3.2), (III.3.3), (III.3.4), qu'uniformément en $R \geq 6$,

$$
\begin{cases}
\bullet\quad \left|\int_Q \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| dm_2(w) - \frac{\pi}{2}|z|^2\right| \le \frac{8\pi|z|^2}{R^2-1} \le 16\pi, \qquad |z|\le R \\[2ex]
\bullet\quad \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e|z|}{R} - \int_Q \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| dm_2(w) \le \frac{\pi}{2}\Big(R^2\ln\frac{e|z|}{R} - |z|^2\big(1-\frac{16}{R^2-1}\big)\Big) \\
\qquad \le \frac{\pi}{2}\Big(R^2\ln\frac{eR}{R} - R^2\big(1-\frac{16}{R^2-1}\big)\Big) \le \frac{33\pi}{4}, \qquad R\le|z|\le\frac{R^2-1}{2} \\[2ex]
\bullet\quad \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e|z|}{R} - \int_Q \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| dm_2(w) \le \frac{\pi}{2}\Big(R^2\ln\frac{e|z|}{R} - |z|^2\Big) + 10\pi R^2\ln(|z|+R^2+1) \\
\qquad \le \frac{\pi}{2}\Big(R^2\ln\frac{e(R^2-1)}{2R} - \frac{(R^2-1)^2}{4} + 20R^2\ln\big(2(R^2+1)\big)\Big) \\
\qquad = O(1), \qquad \frac{R^2-1}{2}\le|z|\le R^2+1 \\[2ex]
\bullet\quad \ln|z| + \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e|z|}{R} - \int_Q \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| dm_2(w) \\
\qquad \le \ln|z| + \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e|z|}{R} - \frac{\pi}{2}(R^2+1)^2\ln\frac{e|z|^2}{(R^2+1)^2} + 10\pi R^2\ln(|z|+R^2+1) \\
\qquad \le \ln(R^2+1) + \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e(R^2+1)}{R} - \frac{\pi}{2}(R^2+1)^2 + 10\pi R^2\ln\big(2(R^2+1)\big) \\
\qquad = O(1), \qquad |z|\ge R^2+1,
\end{cases}
$$

donc, puisque $d_2(z,\Sigma)\le 1+\max\big(0,|z|-R^2+1\big)$, $z\in\mathbb{C}$,

$$
\int_Q \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| dm_2(w)
\begin{cases}
= \frac{\pi}{2}|z|^2 + O(1), & |z|\le R \\[2ex]
\ge \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e|z|}{R} + O(1), & z\in\overline{Q}\setminus R\mathbb{D} \\[2ex]
\ge \ln d_2(z,\Sigma) + \frac{\pi}{2}R^2\ln\frac{e|z|}{R} + O(1), & z\notin\overline{Q}.
\end{cases}
\qquad \text{(III.3.5)}
$$

Puisque

$$
\ln\big(|P_R(z)|/d_2(z,\Sigma)\big) = \int_Q \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| dm_2(w) - \ln d_2(z,\Sigma) - \sum_{\lambda\in\Sigma} B_\lambda(z),
$$

grâce à (III.3.5) et au *Lemme III.3.1 précédent*, nous obtenons les résultats annoncés en distinguant les trois cas $|z|\le R$, $z\in\overline{Q}\setminus R\mathbb{D}$ ou $z\notin\overline{Q}$. □

Lemme III.3.3. *Soient $\Sigma=\Sigma_R$ du Lemme III.3.2 et $\Lambda=\big\{s_k e^{2\pi i m/N_k}\big\}$ avec $\{s_k\}$ et (N_k) ayant les propriétés énoncées au Lemme II.5.1. Posons*

$$
\eta_{l,m} = \big(s_{k+l}e^{2\pi i m/N_{k+l}} - s_k\big)/(\sqrt{2\pi}\chi(s_k)), \qquad l+mi\in\Sigma.
$$

Nous avons

$$\max_{l+mi\in\Sigma}\left|l+mi-\eta_{l,m}\right| \le \varepsilon(k),$$

avec $\varepsilon(k)\to 0$ *quand* $k\to+\infty$.

Démonstration. Pour tout $l+mi\in\Sigma$, nous avons

$$\left|l+mi-\eta_{l,m}\right|^2 = \left|l-\frac{s_{k+l}\cos(2\pi m/N_{k+l})-s_k}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}\right|^2+\left|m-\frac{s_{k+l}\sin(2\pi m/N_{k+l})}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}\right|^2,$$

avec pour $k\to+\infty$,

$$\begin{aligned}\left|m-\frac{s_{k+l}\sin(2\pi m/N_{k+l})}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}\right| &= \left|m-\frac{(1-o(1))(2\pi m/N_{k+l})(1-o(1))}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}\right|\\ &= |m|\left|1-\frac{\sqrt{2\pi}}{N_{k+l}\chi(s_k)}(1+o(1))\right| = |m|\left|1-(1+o(1))(1+o(1))\right| = R^2|o(1)|\end{aligned}$$

et, puisque

$$\frac{s_{k+l}-s_k}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)} = l(1+o(1)),$$

$$\begin{aligned}\left|l-\frac{s_{k+l}\cos(2\pi m/N_{k+l})-s_k}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}\right| &= \left|l-\frac{s_{k+l}(1-O((m/N_{k+l})^2))-s_k}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}\right|\\ &= \left|l-\frac{s_{k+l}-s_k}{\sqrt{2\pi}\chi(s_k)}+m^2o(1)\right| = \left|l(1-(1+o(1)))+m^2o(1)\right| = (R^2+R^4)|o(1)|.\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Proposition III.3.4. *Etant donné* $R\ge 6$, *il existe* $\eta(R)>0$ *tel que pour tout* $z\in\mathbb{D}$ *vérifiant* $1-|z|\le\eta(R)$, *nous avons* $1-|z|>R\chi(z)$, *et il existe une fonction* $g=g_{R,z}$ *analytique sur* $\mathbb{D}$ *telle que*

$$\begin{array}{rcll}|g(w)|e^{-h(w)} &\asymp& e^{-|z-w|^2/(4\chi(z)^2)}, & |z-w|\le R\chi(z),\\ |g(w)|e^{-h(w)} &\le& c(h)\left(\frac{R\chi(z)}{e|z-w|}\right)^{R^2/4}, & |z-w|>R\chi(z).\end{array}$$

Démonstration. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $z\in]0,1[$. Le *Lemme II.5.5* nous donne $\{r_k\}$, $\{N_k\}$, $\{s_k\}$, $\Lambda=\left\{s_ke^{2\pi im/N_k}\right\}$ (avec $\{s_k\}$ et (N_k) ayant les propriétés énoncées au *Lemme II.5.1*) et $f\in\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tels que $z=s_k$ pour un certain k, f a Λ pour ensemble de zéros et

$$|f(w)|\asymp e^{h(w)}\rho_h(w,\Lambda),\qquad w\in\mathbb{D}.$$

Soit $\Sigma = \Sigma_{R/\sqrt{2\pi}}$ du *Lemme III.3.2*. Notons

$$Q(w) = \frac{w - s_k}{\chi(s_k)} \prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0\}} \frac{w - s_{k+l}e^{2\pi im/N_{k+l}}}{s_k - s_{k+l}e^{2\pi im/N_{k+l}}} ,$$

et définissons $g = f/Q$.

Pour $u = ge^{-h}$, en posant $w = z + \sqrt{2\pi}\chi(z)w'$, nous avons

$$\begin{aligned} |u(w)| &\asymp \rho_h(w,\Lambda)\frac{\chi(s_k)}{|w - s_k|} \prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0\}} \left|\frac{s_k - s_{k+l}e^{2\pi im/N_{k+l}}}{w - s_{k+l}e^{2\pi im/N_{k+l}}}\right| \\ &\asymp \frac{d_2(w,\Lambda)}{\chi(w)}\frac{1}{|w'|} \prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0\}} \left|\frac{\eta_{l,m}}{w' - \eta_{l,m}}\right|, \end{aligned}$$

où

$$\eta_{l,m} = \bigl(s_{k+l}e^{2\pi im/N_{k+l}} - s_k\bigr)/(\sqrt{2\pi}\chi(s_k)), \qquad l + mi \in \Sigma.$$

D'après le *Lemme II.2.1*, pour z suffisamment proche de 1, nous avons $1 - |z| > R\chi(z)$. D'après le *Lemme II.2.5*, pour z suffisamment proche de 1, nous avons aussi

$$\chi(w) \asymp \chi(z), \qquad |w'| \leq R^2/(2\pi) + 1. \tag{III.3.6}$$

D'après le *Lemme III.3.3*, pour $\varepsilon(k) < 1/2$ assez petit, avec $\sigma_{w'} \in \Sigma$ tel que $|w' - \sigma_{w'}| = d_2(w',\Sigma)$, pour tout $l + mi \in \Sigma \setminus \{0, \sigma_{w'}\}$,

$$\frac{\left|\frac{\eta_{l,m}}{w'-\eta_{l,m}}\right|}{\left|\frac{l+mi}{w'-(l+mi)}\right|} = \frac{\left|\frac{\eta_{l,m}}{l+mi}\right|}{\left|\frac{\eta_{l,m}-w'}{l+mi-w'}\right|} = \frac{\left|1 - \frac{l+mi-\eta_{l,m}}{l+mi}\right|}{\left|1 - \frac{l+mi-\eta_{l,m}}{l+mi-w'}\right|} \begin{cases} \leq \frac{1+\varepsilon(k)}{1-2\varepsilon(k)} \leq 2^{(R^2/\pi+1)^{-2}} \\ \\ \geq \frac{1-\varepsilon(k)}{1+2\varepsilon(k)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{(R^2/\pi+1)^{-2}}. \end{cases}$$

Il vient

$$\prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0,\sigma_{w'}\}} \frac{\left|\frac{\eta_{l,m}}{w'-\eta_{l,m}}\right|}{\left|\frac{l+mi}{w'-(l+mi)}\right|} \leq \Bigl(\frac{1+\varepsilon(k)}{1-2\varepsilon(k)}\Bigr)^{(R^2/\pi+1)^2} \leq 2$$

et

$$\prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0,\sigma_{w'}\}} \frac{\left|\frac{\eta_{l,m}}{w'-\eta_{l,m}}\right|}{\left|\frac{l+mi}{w'-(l+mi)}\right|} \geq \Bigl(\frac{1-\varepsilon(k)}{1+2\varepsilon(k)}\Bigr)^{(R^2/\pi+1)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Nous avons alors

$$\prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0,\sigma_{w'}\}} \left|\frac{\eta_{l,m}}{w' - \eta_{l,m}}\right| \asymp \prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0,\sigma_{w'}\}} \left|\frac{l + mi}{w' - (l + mi)}\right|.$$

Distinguons les trois cas suivants.

Si $|w'| \le \frac{1}{2}$ alors

$$|u(w)| \asymp \prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0\}} \left|\frac{\eta_{l,m}}{w'-\eta_{l,m}}\right| \asymp \prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0\}} \left|\frac{l+mi}{w'-(l+mi)}\right| \asymp \frac{d_2(w',\Sigma)}{|P_{R/\sqrt{2\pi}}(w')|};$$

si $\frac{1}{2} < |w'| \le R^2/(2\pi)+1$ alors d'après (III.3.6) et

$$\left|\frac{\eta_{\sigma_{w'}}}{\sigma_{w'}}\right| = \left|1+\frac{\eta_{\sigma_{w'}}-\sigma_{w'}}{\sigma_{w'}}\right| \in [1-\varepsilon(k), 1+\varepsilon(k)] \subset [1/2, 3/2],$$

$$\begin{aligned}
|u(w)| &\asymp \frac{d_2(w,\Lambda)}{\chi(w)}\left|\frac{\eta_{\sigma_{w'}}}{w'-\eta_{\sigma_{w'}}}\right|\frac{1}{|w'|}\prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0,\sigma_{w'}\}}\left|\frac{\eta_{l,m}}{w'-\eta_{l,m}}\right| \\
&\asymp \frac{d_2(w,\Lambda)}{\chi(w)}\left|\frac{w'-\sigma_{w'}}{w'-\eta_{\sigma_{w'}}}\right|\left|\frac{\eta_{\sigma_{w'}}}{\sigma_{w'}}\right|\frac{1}{|w'|}\prod_{l+mi\in\Sigma\setminus\{0\}}\left|\frac{l+mi}{w'-(l+mi)}\right| \\
&\asymp \frac{d_2(w,\Lambda)/\chi(w)}{|w'-\eta_{\sigma_{w'}}|}\frac{d_2(w',\Sigma)}{|P_{R/\sqrt{2\pi}}(w')|} \qquad \asymp \frac{d_2(w',\Sigma)}{|P_{R/\sqrt{2\pi}}(w')|};
\end{aligned}$$

si $|w'| > R^2/(2\pi)+1$ alors $|w'-\eta_{\sigma_{w'}}| \ge |w'-\sigma_{w'}| - \varepsilon(k) \ge 1-\varepsilon(k) \ge 1/2$ et

$$|u(w)| \asymp \frac{d_2(w,\Lambda)/\chi(w)}{|w'-\eta_{\sigma_{w'}}|}\frac{d_2(w',\Sigma)}{|P_{R/\sqrt{2\pi}}(w')|} \qquad \le c\frac{d_2(w',\Sigma)}{|P_{R/\sqrt{2\pi}}(w')|}.$$

Maintenant, d'après le *Lemme III.3.2*,

$$|u(w)| \asymp \exp\left(-\tfrac{\pi}{2}|w'|^2\right) = \exp\left(-\tfrac{|z-w|^2}{4\chi(z)^2}\right), \qquad |w'| \le \tfrac{R}{\sqrt{2\pi}},$$

$$|u(w)| \le c_1\left(\tfrac{R/\sqrt{2\pi}}{e|w'|}\right)^{(\pi/2)(R^2/(2\pi))} = c_1\left(\tfrac{R\chi(z)}{e|z-w|}\right)^{R^2/4}, \qquad |w'| > \tfrac{R}{\sqrt{2\pi}}.$$

□

III.3.2. Limites faibles. Avant de donner la preuve de la nécessité de notre condition d'échantillonnage, nous avons besoin d'une proposition qui nous permette de ramener l'estimation de la densité dans le disque à celle de l'espace de Fock classique (dans le plan).

Soit $\Gamma \subset \mathbb{D}$; pour $z \in \mathbb{D}$ et $R > 0$, on pose

$$\begin{cases} \Gamma(z,R) &= \Gamma \cap \mathbb{D}(z, R\chi(z)) \\ q_-(R) &= \underline{\lim}_{|z|\to 1, z\in\mathbb{D}} \dfrac{\operatorname{Card}\Gamma(z,R)}{\pi R^2}. \end{cases}$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme III.3.5. *Soit* $\Gamma \subset \mathbb{D}$ *tel que* $D^-_\chi(\Gamma) < +\infty$. *Pour tout* $R > 0$, *il existe* $0 < \varepsilon' < 1$ *tel que pour tout* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$, *il existe* $R' \geq R$ *tel que si* $R'' \geq R'$, $\eta_1(R'') \leq |w| < 1$ *et*

$$\frac{\operatorname{Card}\Gamma(w, R'')}{\pi R''^2} < q_-(R) + \frac{\varepsilon^2}{5},$$

alors

$$E^c = \Big\{z \in \mathbb{D}(w, R''\chi(w)/2) : \frac{\operatorname{Card}\Gamma(z, R)}{\pi R^2} < q_-(R) + \varepsilon\Big\} \quad \neq \emptyset.$$

Démonstration. Nous allons montrer que E^c est de mesure non nulle. D'après le *Lemme II.2.5*, pour R'' fixé,

$$\max_{z \in \mathbb{D}(w, R''\chi(w))} \Big|\ln \frac{\chi(w)}{\chi(z)}\Big| = o(1), \qquad |w| \to 1-,$$

donc, pour ε fixé et $|w|$ assez proche de 1, nous avons

$$(R + \varepsilon^3)\chi(w) \geq R\chi(z), \qquad z \in \mathbb{D}(w, R''\chi(w)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\big(\Gamma \cap \mathbb{D}\big(z, (R + \varepsilon^3)\chi(w)\big)\big) &\geq \operatorname{Card}\Gamma(z, R) \\ &\geq (q_-(R) - \varepsilon^3)\pi R^2, \qquad z \in \mathbb{D}(w, R''\chi(w)), \end{aligned} \tag{III.3.7}$$

et si on pose

$$\begin{aligned} E &= \Big\{z \in \mathbb{D}(w, R''\chi(w)/2) : \tfrac{\operatorname{Card}\Gamma(z,R)}{\pi R^2} \geq q_-(R) + \varepsilon\Big\}, \\ E' &= \Big\{z \in \mathbb{D}(w, R''\chi(w)/2) : \tfrac{\operatorname{Card}\left(\Gamma \cap \mathbb{D}\left(z, (R+\varepsilon^3)\chi(w)\right)\right)}{\pi R^2} \geq q_-(R) + \varepsilon\Big\}, \end{aligned}$$

alors

$$E \subset E'. \tag{III.3.8}$$

Car si $z \in E \setminus E'$ alors

$$\begin{aligned} (q_-(R) + \varepsilon)\pi R^2 &> \operatorname{Card}\big(\Gamma \cap \mathbb{D}\big(z, (R + \varepsilon^3)\chi(w)\big)\big) \geq \operatorname{Card}\Gamma(z, R) \\ &\geq \pi R^2(q_-(R) + \varepsilon), \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Pour $0 < r_1 < r_2$ et pour $F \subset (r_2 - r_1)\mathbb{D}$, le théorème de Fubini nous donne

$$\int_{r_2\mathbb{D}} \mathrm{Card}\,\big(F \cap \mathbb{D}(z, r_1)\big)\, dm_2(z) \;= \int_{|z|<r_2} \sum_{w\in F\cap\mathbb{D}(z,r_1)} 1\, dm_2(z)$$

$$= \sum_{w\in F\cap(r_1+r_2)\mathbb{D}} \int_{z\in\mathbb{D}(w,r_1)} 1\, dm_2(z) = \pi r_1^2 \mathrm{Card}\,\big(F \cap (r_1 + r_2)\mathbb{D}\big) \;= \pi r_1^2 \mathrm{Card}\, F,$$

donc

$$\mathrm{Card}\, F = \frac{1}{\pi r_1^2} \int_{r_2\mathbb{D}} \mathrm{Card}\,\big(F \cap \mathbb{D}(z, r_1)\big)\, dm_2(z). \tag{III.3.9}$$

En prenant $r_1 = (R + \varepsilon^3)\chi(w)$, $r_2 = |w| + (R'' + R + \varepsilon^3)\chi(w)$ et $F = \Gamma(w, R'')$, nous avons, pour $R'' > R + 1$,

$$\big(\pi(R + \varepsilon^3)^2\chi(w)^2\big)\mathrm{Card}\, \Gamma(w, R'')$$
$$\geq \int_{\mathbb{D}\left(w,(R''-R-\varepsilon^3)\chi(w)\right)} \mathrm{Card}\,\big(\Gamma \cap \mathbb{D}\big(z, (R + \varepsilon^3)\chi(w)\big)\big)\, dm_2(z).$$

D'après (III.3.7), pour $R'' \geq 2(R + 1)$, on a

$$E' \subset \mathbb{D}\big(w, (R'' - R - \varepsilon^3)\chi(w)\big)$$

et

$$\big(\pi(R + \varepsilon^3)^2\chi(w)^2\big)\mathrm{Card}\, \Gamma(w, R'') \;\geq\; \int_{E'} \mathrm{Card}\,\big(\Gamma \cap \mathbb{D}\big(z, (R + \varepsilon^3)\chi(w)\big)\big)\, dm_2(z) +$$
$$\int_{\mathbb{D}\left(w,(R''-R-\varepsilon^3)\chi(w)\right)\setminus E'} \mathrm{Card}\,\big(\Gamma \cap \mathbb{D}\big(z, (R + \varepsilon^3)\chi(w)\big)\big)\, dm_2(z)$$
$$\geq \pi R^2 m_2(E')(q_-(R) + \varepsilon) + \pi R^2\Big(m_2\big(\mathbb{D}\big(w, (R'' - R - \varepsilon^3)\chi(w)\big)\big) - m_2(E')\Big)\big(q_-(R) - \varepsilon^3\big)$$
$$\geq \pi^2 R^2\chi(w)^2\Big((R'' - R - \varepsilon^3)^2(q_-(R) - \varepsilon^3) + \frac{m_2(E')}{\pi\chi(w)^2}(\varepsilon + \varepsilon^3)\Big).$$

Si $m_2(E) \geq \varepsilon m_2(\mathbb{D}(w, R''\chi(w)/2))$ alors, d'après (III.3.8),

$$m_2(E') \geq m_2(E) \geq \varepsilon m_2(\mathbb{D}(w, R''\chi(w)/2)) = \pi R''^2\chi(w)^2\varepsilon/4,$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Card}\Gamma(w,R'')}{\pi R''^2} &\geq \Big(\frac{R}{R+\varepsilon^3}\Big)^2\Big(\Big(\frac{R''-R-\varepsilon^3}{R''}\Big)^2(q_-(R)-\varepsilon^3)+\frac{\varepsilon}{4}(\varepsilon+\varepsilon^3)\Big)\\
&\geq \Big(\frac{1-(R+1)/R''}{1+\varepsilon^3/R}\Big)^2 q_-(R)+\frac{\varepsilon^2}{4}(1+\varepsilon^3/R)^{-2}-\varepsilon^3\\
&\geq q_-(R)+\frac{\varepsilon^2}{5}\Big(\frac{5}{4}(1+\varepsilon^3/R)^{-2}-5\varepsilon-\frac{10q_-(R)}{\varepsilon^2}\Big(1-\frac{1-(R+1)/R''}{1+\varepsilon^3/R}\Big)\Big)\\
&\geq q_-(R)+\frac{\varepsilon^2}{5}\Big(\frac{5}{4}(1+\varepsilon^3/R)^{-2}-5(1+2q_-(R)/R)\varepsilon-10q_-(R)(R+1)/(R'\varepsilon^2)\Big),
\end{aligned}$$

d'où pour $\varepsilon(R)$ suffisamment petit et $R'(R,\varepsilon)$ grand,

$$\frac{\operatorname{Card}\Gamma(w,R'')}{\pi R''^2} \geq q_-(R)+\frac{\varepsilon^2}{5}\Big(\frac{12}{10}-\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\Big) \geq q_-(R)+\frac{\varepsilon^2}{5}.$$

Par contraposition, si

$$\frac{\operatorname{Card}\Gamma(w,R'')}{\pi R''^2} < q_-(R)+\frac{\varepsilon^2}{5},$$

alors

$$m_2(E) < \varepsilon m_2(\mathbb{D}(w,R''\chi(w)/2)).$$

Donc

$$m_2(E^c) = m_2(\mathbb{D}(w,R''\chi(w)/2)) - m_2(E) > (1-\varepsilon)m_2(\mathbb{D}(w,R''\chi(w)/2)) > 0,$$

et $E^c \neq \emptyset$. □

Soit $\Gamma \subset \mathbb{D}$; pour $z \in \mathbb{D}$ et $R > 0$, on pose

$$\Gamma^{\#}(z,R) = \frac{1}{\chi(z)}(\Gamma(z,R)-z) = \frac{1}{\chi(z)}\Big((\Gamma\cap\mathbb{D}(z,R\chi(z)))-z\Big).$$

Etant donnés deux sous–ensembles fermés A et B de $\mathbb{C}$, la distance de Fréchet $[A,B]$ est le plus petit $t>0$ tel que $A \subset B+t\overline{\mathbb{D}}$, $B \subset A+t\overline{\mathbb{D}}$. Une suite de $A_j \subset \mathbb{C}$ converge faiblement vers A si pour tout $R>0$,

$$\big[(A_j\cap R\mathbb{D})\cup R\partial\mathbb{D},(A\cap R\mathbb{D})\cup R\partial\mathbb{D}\big] \to 0, \qquad j\to+\infty.$$

Dans ce cas nous utilisons la notation $A_j \rightharpoonup A$, $\quad j\to+\infty$.

Proposition III.3.6. *Si $\Gamma \subset \mathbb{D}$ vérifie $D^-_\chi(\Gamma) \leq 1/(2\pi)$, alors il existe une suite de points $z_j \in \mathbb{D}$, une suite $R_j \to +\infty$, $1-|z_j| \leq \eta(R_j)$, et un sous–ensemble dénombrable Γ_0 de $\mathbb{C}$ tels* *que*

$$\Gamma^{\#}(z_j, R_j) \rightharpoonup \Gamma_0, \qquad j \to +\infty, \tag{III.3.10}$$

$$\varlimsup_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\,\big(\Gamma_0 \cap R\mathbb{D}\big)}{\pi R^2} \le \frac{1}{2\pi}. \tag{III.3.11}$$

Démonstration. Nous appliquons récursivement le *Lemme III.3.5* pour trouver $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\delta_k \to 0+$, $k\to+\infty$, $\varepsilon_m \to 0+$, $R_m \to +\infty$, $\eta_m \to 1-$, $m \to +\infty$, tels que si $m \ge 1$, $\eta_m \le |w| < 1$ et

$$\frac{\mathrm{Card}\,\Gamma(w, R_m)}{\pi R_m^2} \le q_-(R_m) + \varepsilon_m,$$

alors il existe $z = z(w, R_m, \varepsilon_m) \in \mathbb{D}(w, R_m\chi(w)/2)$ tel que

$$\frac{\mathrm{Card}\,\Gamma(z, n_k)}{\pi n_k^2} \le q_-(n_k) + \delta_k, \qquad 1 \le k \le m.$$

Ensuite, par définition de $q_-(R_m)$, nous trouvons w_m, $\eta_m \le |w_m| < 1$, tel que

$$\frac{\mathrm{Card}\,\Gamma(w_m, R_m)}{\pi R_m^2} \le q_-(R_m) + \varepsilon_m,$$

et nous définissons $z_m = z(w_m, R_m, \varepsilon_m)$. Enfin, nous obtenons

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\,\Gamma(z_m, n_k)}{\pi n_k^2} \le q_-(n_k) + \delta_k, \qquad k \ge 1,$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$,

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\, \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\,\Gamma(z_m, n_k)}{\pi n_k^2} \le D_\chi^-(\Gamma) \le \frac{1}{2\pi}.$$

En utilisant l'argument de compacité, nous trouvons une suite m_k et un ensemble $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$ tels que $\Gamma^{\#}(z_{m_k}, n_{m_k}) \rightharpoonup \Gamma_0$, $m_k \to +\infty$. La *propriété* (III.3.11) en résulte. □

III.3.3. Preuve de la nécessité de la condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. On est maintenant à même d'achever la preuve du Théorème principal III.1.1.

Preuve de la nécessité de la condition d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Nous allons montrer que si $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient Γ' ρ_h–séparé tel que $D_\chi^-(\Gamma') > 1/(2\pi)$.

D'après le *Corollaire II.2.12*, on peut supposer que Γ est ρ_h–séparé. Raisonnons par contraposition en supposant que $\Gamma \subset \mathbb{D}$ ρ_h–séparé est tel que $D_\chi^-(\Gamma) \le 1/(2\pi)$, et en en déduisant que Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Nous allons suivre la démarche proposée par Lyubarskii et Seip dans [**15**]. Nous appliquons la *Proposition III.3.6* pour obtenir Γ_0 vérifiant (III.3.10)–(III.3.11). Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Nous posons $\phi(z) = |z|^2/4$ et

$$\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C}) = \big\{ f \text{ holomorphes sur } \mathbb{C} : \|f\|_\phi = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-\phi(z)} < +\infty \big\}.$$

Rappelons le résultat de [**21**] et [**26**] : toute suite Λ est d'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$ si et seulement si Λ contient une suite séparée Λ' telle que

$$\varliminf_{R\to+\infty} \inf_{w\in\mathbb{C}} \frac{\operatorname{Card}\big(\Lambda' \cap \mathbb{D}(w,R)\big)}{\pi R^2} > \frac{1}{2\pi}.$$

Puisque

$$\varliminf_{R\to+\infty} \inf_{w\in\mathbb{C}} \frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma_0 \cap \mathbb{D}(w,R)\big)}{\pi R^2} \le \varliminf_{R\to+\infty} \frac{\operatorname{Card}\big(\Gamma_0 \cap R\mathbb{D}\big)}{\pi R^2} \le \frac{1}{2\pi},$$

Γ_0 n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$. Donc il existe une fonction entière f telle que

$$\begin{cases} \|f\|_\phi & = & 1, \\ \|f|_{\Gamma_0}\|_\phi & = & \sup_{z\in\Gamma_0} |f(z)|e^{-\phi(|z|)} \le \varepsilon, \\ |f(0)| & \ge & 1/2. \end{cases}$$

Pour $K > 1$, nous posons $f_K(z) = f((1-K^{-3/2})z)$. Le Lemme 3.1 [**21**] de Seip donne une majoration de type Bernstein : il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}_\phi(\mathbb{C})$,

$$\big| |f(z)|e^{-\phi(z)} - |f(w)|e^{-\phi(w)} \big| \le C\|f\|_\phi |z-w|.$$

Alors

$$\begin{aligned} |f_K(z)|e^{-\phi(z)} &\le |f_K(z)|e^{-\phi((1-K^{-3/2})z)} \\ &\le |f(z)|e^{-\phi(z)} + \big| |f(z)|e^{-\phi(z)} - |f((1-K^{-3/2})z)|e^{-\phi((1-K^{-3/2})z)} \big| \\ &= |f(z)|e^{-\phi(z)} + o(1), \qquad |z| \le K, \quad K \to +\infty. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |f_K(z)|e^{-\phi(z)} &= |f((1-K^{-3/2})z)|e^{-\phi((1-K^{-3/2})z)} e^{-(1-(1-K^{-3/2})^2)\phi(z)} \\ &\le \|f\|_\phi e^{-(1-(1-K^{-3/2})^2)\phi(K)} = e^{-\sqrt{K}/2+1/(4K)} \\ &= o(1), \qquad |z| > K, \quad K \to +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour K suffisamment grand, nous obtenons

$$\|f_K\|_\phi \asymp 1, \qquad \|f_K|_{\Gamma_0}\|_\phi \le 2\varepsilon.$$

Nous fixons un tel K et, pour $N \in \mathbb{N}$, nous posons

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \qquad f^N(z) = \sum_{0 \leq n \leq N} a_n z^n,$$

donc

$$\begin{aligned} f_K(z) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n &&= \textstyle\sum_{n \geq 0} a_n (1 - K^{-3/2})^n z^n, \\ f_K^N(z) &= \textstyle\sum_{0 \leq n \leq N} b_n z^n &&= \textstyle\sum_{0 \leq n \leq N} a_n (1 - K^{-3/2})^n z^n. \end{aligned}$$

La formule de Cauchy et la formule de Stirling nous donnent

$$|a_n| \leq \inf_{r>0} \frac{1}{r^n} \|f\|_\phi e^{\phi(r)} = \Big(\frac{e}{2n}\Big)^{n/2} \leq c \frac{n^{1/4}}{2^{n/2}\sqrt{n!}}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n>1} |a_n||z|^n &\leq c \sum_{n>1} \frac{n^{1/4}}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{(|z|^2/2)^{n/2}}{\sqrt{(n-2)!}} \\ &\leq c \Big(\sum_{n>1} \frac{1}{(n-1)^{3/2}}\Big)^{1/2} \Big(\frac{|z|^4}{4} \sum_{n>1} \frac{(|z|^2/2)^{n-2}}{(n-2)!}\Big)^{1/2} \\ &\leq c|z|^2 e^{|z|^2/4}, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n>1} |b_n||z|^n e^{-\phi(z)} \leq c|z|^2 e^{-(1-(1-K^{-3/2})^2)|z|^2/4}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Soient $0 < c_1 \leq \|f_K\|_\phi \leq c_2 < \infty$. Puisque

$$|z|^2 e^{-(1-(1-K^{-3/2})^2)|z|^2/4} \to 0, \qquad |z| \to +\infty,$$

nous pouvons prendre $A > 0$ tel que

$$c|z|^2 e^{-(1-(1-K^{-3/2})^2)|z|^2/4} \leq \min(\varepsilon, c_1/2), \qquad |z| > A,$$

puis $N \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que

$$\sup_{|z| \leq A} |f_K^N(z) - f_K(z)| \leq \min(\varepsilon, c_1/2).$$

Il en résulte

$$\|f_K^N - f_K\|_\phi \leq \min(\varepsilon, c_1/2),$$

d'où

$$c_1/2 \leq \|f_K\|_\phi - \|f_K^N - f_K\|_\phi \leq \|f_K^N\|_\phi \leq \|f_K\|_\phi + \|f_K^N - f_K\|_\phi \leq c_2 + c_1/2$$

et

$$\|f_K^N|\Gamma_0\|_\phi \leq \|f_K|\Gamma_0\|_\phi + \|(f_K^N - f_K)|\Gamma_0\|_\phi \leq \|f_K|\Gamma_0\|_\phi + \|f_K^N - f_K\|_\phi \leq 3\varepsilon.$$

Par conséquent pour N suffisamment grand,

$$\|f_K^N\|_\phi \asymp 1, \qquad \|f_K^N|\Gamma_0\|_\phi \leq 3\varepsilon.$$

Nous fixons un tel N, nous posons $P = f_K^N$ et nous choisissons $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que

$$|P(\zeta)|e^{-\phi(\zeta)} \asymp 1.$$

D'après (III.3.10) et puisque $\lim_{|W|\to+\infty} |P(W)|/|W|^{N+1} = 0$, pour R suffisamment grand et $z \in \mathbb{D}$ suffisamment proche du cercle unité,

$$\|P|_{\Gamma\#(z,R)}\|_\phi \leq 4\varepsilon,$$

$$|P(W)| \leq \varepsilon|W|^{R/4}, \qquad |W| \geq R.$$

Nous fixons un tel $R \geq \max(|\zeta|, 6)$ et un tel $z \in \mathbb{D}$ vérifiant $1 - |z| \leq \eta(R)$, de sorte qu'il existe $g = g_{R,z}$ la fonction pic de la *Proposition III.3.4*. Nous posons

$$F(w) = F_\varepsilon(w) = g(w)P\Big(\frac{w-z}{\chi(z)}\Big).$$

Alors uniformément en ε, pour $w = z + \zeta\chi(z)$,

$$|F(w)|e^{-h(w)} \asymp |g(w)|e^{-h(w)}|P(\zeta)| \asymp e^{-|\zeta|^2/4}e^{\phi(\zeta)} \asymp 1;$$

pour $w \in \Gamma \cap \mathbb{D}(z, R\chi(z))$,

$$|F(w)|e^{-h(w)} \leq e^{-|w-z|^2/(4\chi(z)^2)}4\varepsilon e^{|w-z|^2/(4\chi(z)^2)} \leq 4\varepsilon;$$

pour $w \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}(z, R\chi(z))$,

$$\begin{aligned} |F(w)|e^{-h(w)} &\leq c\Big(\frac{R\chi(z)}{e|z-w|}\Big)^{R^2/4}\varepsilon\Big(\frac{|z-w|}{\chi(z)}\Big)^{R/4} \\ &\leq c\varepsilon\Big(\frac{R\chi(z)}{|z-w|}\Big)^{R(R-1)/4}\Big(\frac{1}{e}\Big)^{R(R-\ln R)/4} \\ &\leq c\varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque ε peut être choisi arbitrairement petit, Γ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Bibliographie

[1] B. Berndtsson, J. Ortega–Cerdà, *On interpolation and sampling in Hilbert spaces of analytic functions*, J. Reine Angew. Math. **464** (1995) 109–128.

[2] A. Beurling, *The collected works of Arne Beurling. Vol. 2 Harmonic Analysis*, Eds. L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer, Birkhäuser, Boston, 1989, pp. 341–365.

[3] A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay, *Sampling and interpolation in radial weighted spaces of analytic functions.* Prépublication sur "http ://fr.arxiv.org/abs/math.CV/0506297" (2005).

[4] K. Cichoń, K. Seip, *Weighted holomorphic spaces with trivial closed range multiplication operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002) 201–207.

[5] R. Dhuez, *Möbius instability of sampling for small weighted spaces of analytic functions*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005) 738–746.

[6] P. Domański, M. Lindström, *Sets of interpolation and sampling for weighted Banach spaces of holomorphic functions*, Ann. Polon. Math. **79** no. 3 (2002) 233–264.

[7] P. Duren, A. Schuster, K. Seip, *Uniform densities of regular sequences in the unit disk*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000) 3971–3980.

[8] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Pure and Applied Mathematics **96**, Academic Press, Inc. New York-London, 1981.

[9] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. **41** (1974) 693–710.

[10] C. Horowitz, B. Korenblum, B. Pinchuk, *Sampling sequences for* $A^{-\infty}$, Michigan Math. J. **44** no. 2 (1997) 389–398.

[11] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer–Verlag, New York, 2000.

[12] L.H. Khôi, P. Thomas, *Weakly sufficient sets for* $A^{-\infty}(\mathbb{D})$, Publ. Mat. **42** no. 2 (1998) 435–448.

[13] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory*, Acta Math. **135** (1975) 187–219.

[14] Yu. Lyubarskii, E. Malinnikova, *On approximation of subharmonic functions,* J. Anal. Math. **83** (2001) 121–149.

[15] Yu. Lyubarskii, K. Seip, *Sampling and interpolation of entire functions and exponential systems in convex domains*, Ark. Mat. **32** no. 1 (1994) 157–193.

[16] Yu. Lyubarskii, M. Sodin, *Analogues of sine type functions for convex domains*, Preprint no. 17, Inst. Low Temp. Phys. Eng., Ukrainian Acad. Sci., Kharkov, 1986.

[17] N. Marco, X. Massaneda, J. Ortega–Cerdà, *Interpolating and sampling sequences for entire functions*, Geom. and Funct. Anal. **13** (2003) 862–914.

[18] J. Ortega–Cerdà, K. Seip, *Beurling-type density theorems for weighted L^p spaces of entire functions*, J. Anal. Math. **75** (1998) 247–266.

[19] W. Rudin, *Analyse Réelle et Complexe*, Masson, Paris (1995).

[20] K. Seip, *Beurling type density theorems in the unit disk*, Inv. Math. **113** (1993) 21–31.

[21] K. Seip, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space*, I, J. Reine Angew. Math. **429** (1992) 91–106.

[22] K. Seip, *Developments from nonharmonic Fourier series*, Documenta Math. J. DMV, Extra Volume ICM (1998) 713–722.

[23] K. Seip, *Interpolating and sampling in spaces of analytic functions*, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[24] K. Seip, *On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$*, J. Anal. Math. **67** (1995) 307–322.

[25] K. Seip, *Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993) 213–220.

[26] K. Seip, R. Wallstén, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space*, II, J. Reine Angew. Math. **429** (1992) 107–113.

ECHANTILLONNAGE POUR LES ESPACES DE FONCTIONS ANALYTIQUES À POIDS

Résumé

Nous nous intéressons au problème d'échantillonnage pour les espaces de fonctions analytiques dans le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, à poids radial. Nous considérons l'espace de Banach

$$\mathcal{A}_h(\mathbb{D}) = \{f \text{ holomorphes sur } \mathbb{D} : \|f\|_h = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|e^{-h(|z|)} < +\infty\},$$

où le poids h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $h(r) \to +\infty$ quand $r \to 1-$.

Le premier chapitre est consacré au cas des poids à croissance lente. Nous montrons que la stabilité de Möbius de l'échantillonnage n'est pas vérifiée dans $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Les deux chapitres suivants sont consacrés au cas des poids à croissance rapide. Nous caractérisons les suites d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ en terme de densité.

SAMPLING FOR WEIGHTED SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Abstract

We are interested in the sampling problem for the spaces of analytic functions in the unit disk $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, with radial weights. We consider the Banach space

$$\mathcal{A}_h(\mathbb{D}) = \{f \text{ analytic on } \mathbb{D} : \|f\|_h = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|e^{-h(|z|)} < +\infty\},$$

where the weight h is of class $\mathcal{C}^2$ and $h(r) \to +\infty$ as $r \to 1-$.

The first chapter deals with the case of slowly increasing weights. We show that Möbius stability of sampling fails in $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

The two following chapters deal with the case of fast increasing weights. We characterize sampling sequences for $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ in terms of density.

Discipline : Mathématiques.

Mots-clés : espace à poids, échantillonnage, séparation, densité, instabilité de Möbius.

Laboratoire : L. A. T. P. (U. M. R. 6632) Université de Provence, Centre de Mathématiques et d'Informatique, 39 rue F. Joliot-Curie 13453 Marseille-Cedex 13, France.